Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

LMAC, MEBiom, MEFT
Teste de Recuperação - 26 de Junho de 2009
Duração: 90 minutos

Apresente e justifique todos os cálculos

1^0Teste

(3 val.) 1. Seja $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 tal que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a}(0,0) = 1, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial b}(0,0) = 3,$$

onde $a = (1,2)$ e $b = (0,1)$. Determine a matriz Jacobiana $D\varphi(0,0)$.

2. Considere o conjunto

$$W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2xy,\ x^2 + y^2 < 1\}.$$

(2.5 val.) a) Verifique que W é uma variedade e determine a sua dimensão.

(2.5 val.) b) Determine a equação do plano tangente a W no ponto $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{3})$.

(3.5 val.) c) Será possível descrever W na vizinhança do ponto $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{3})$ como um gráfico da forma $y = f(x,z)$? Em caso afirmativo determine $Df(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{3})$.

(3.5 val.) d) Seja $\overline{W} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2xy, x^2 + y^2 \leq 1\}$. Determine o valor máximo e o valor mínimo de $\phi(x,y,z) = x^2 - y^2 + z$ em $\overline{W}$.

(2 val.) 3. Seja $\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 e

$$g(x,y) = \alpha(x^2 - y^2, x + y).$$

Seja $p = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Mostre que

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(p) + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(p) = 2\,\mathrm{Tr}\, H_\alpha(0,1),$$

onde $H_\alpha(0,1)$ é a matriz Hessiana de α no ponto $(0,1)$.

(3 val.) 4. Sejam $A, B \subset \mathbb{R}^3$ variedades-2 que se intersectam transversalmente, ou seja tal que

$$\forall p \in A \cap B, \quad T_pA + T_pB = \mathbb{R}^3.$$

Mostre que $A \cap B$ é uma variedade de dimensão 1.

Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

LMAC, MEBiom, MEFT
Teste de Recuperação - 26 de Junho de 2009
Duração: 90 minutos

Apresente e justifique todos os cálculos

2^0 Teste

1. Considere a região $V \subset \mathbb{R}^3$ definida por

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq (x^2 + y^2)^{3/2},\ x^2 + y^2 \leq 1,\ y \geq 0\}.$$

(3 val.) a) Escreva uma expressão para o volume de V da forma $\int_{\cdots}^{\cdots} (\int_{\cdots}^{\cdots} (\int_{\cdots}^{\cdots} dy)\, dx)\, dz$.

(3 val.) b) Calcule a massa total de V sabendo que a densidade de massa é constante e igual a 1.

2. Considere a superfície

$$S = \{(x, y, z) =\in \mathbb{R}^3 : z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2},\ 0 < z < 1\},$$

orientada com a normal unitária n com $n_z < 0$.

(2 val.) a) Determine a área de S.

(3 val.) b) Calcule o fluxo de $h(x, y, z) = (x + z^3, y + x^3, z)$ através de S no sentido de n.

(3 val.) c) Utilizando o teorema de Stokes, calcule o fluxo de $f(x, y, z) = (y, x, 0)$ através de S no sentido de n.

(3 val.) d) Considere o campo vectorial

$$g(x, y, z) = \left(-y + \frac{y}{x^2 + y^2} + x^4, 2x - \frac{x}{x^2 + y^2} + y, 0 \right).$$

Calcule o trabalho de g ao longo de ∂S orientado de forma consistente com n.

(3 val.) 3. Seja $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, y, 0),\ y \in \mathbb{R}\}$ um campo vectorial de classe C^1 dado por

$$f(x, y, z) = \varphi(\sqrt{x^2 + z^2})\,(x, 0, z)\,,$$

onde φ é um campo escalar. Sabendo que $\operatorname{div} f = 0$ e que $f(1, 0, 0) = (7, 0, 0)$ determine φ.