Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

LMAC, MEBiom, MEFT

Teste de Recuperação - 18 de Junho de 2008 - 9h

Duração: 90 minutos

Apresente e justifique todos os cálculos

<u>1^0Teste</u>

(2.5 val.) 1. Calcule ou mostre que não existe o limite

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{xy^2 - y^2}{(x-1)^2 + y^2}.$$

2. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2, tal que $\nabla f(0,1) = (0,1)$. Seja ainda $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $\varphi(x,y) = f(y, \cos x)$.

(2.5 val.) (a) Mostre que $(0,0)$ é um ponto de estacionaridade de φ.

(2 val.) (b) Sabendo que a entrada $(1,1)$ da matriz Hessiana de f no ponto $(0,1)$ é -2, mostre que a matriz Hessiana de φ no ponto $(0,0)$ é $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$.

(2 val.) (c) Classifique o ponto de estacionaridade $(0,0)$ de φ.

(3 val.) 3. Determine a recta normal ao cone

$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2\}$$

no ponto $(3,4,5)$.

4. Seja $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ a função que calcula o quadrado da distância entre os pontos (x,y) e (z,w):

$$F(x,y,z,w) = (x-z)^2 + (y-w)^2.$$

(3 val.) (a) Justifique que a equação $F(x,y,z,w) = 2$ define w como uma função f de (x,y,z) numa vizinhança do ponto $(1,-1,0,0)$. Calcule $Df(1,-1,0)$.

(2 val.) (b) Determine os pontos das curvas $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x - 1\}$ e $P = \{(z,w) \in \mathbb{R}^2 : w = z^2\}$ mais próximos entre si.

(3 val.) 5. Seja $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 tal que a função $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = f(x,0)$ tem um mínimo local em $x = 0$ e $\det H_g(0) \neq 0$, onde $H_g(0)$ é a matriz Hessiana de g na origem. Mostre que a função $g_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por

$$g_t(x) = f(x,t)$$

tem um mínimo local numa vizinhança da origem, para t suficientemente pequeno.

Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

LMAC, MEBiom, MEFT
Teste de Recuperação - 18 de Junho de 2008 - 9h
Duração: 90 minutos

Apresente e justifique todos os cálculos

2^0 Teste

1. Considere a região $V \subset \mathbb{R}^3$ definida por

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1 + z^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ 1 \geq z \geq 0\}.$$

(3.5 val.) a) Escreva uma expressão para o volume de V da forma

$$\int_{\cdots}^{\cdots} \left(\int_{\cdots}^{\cdots} \left(\int_{\cdots}^{\cdots} dy \right) dx \right) dz.$$

(3.5 val.) b) Calcule a massa total de V sabendo que a densidade de massa é constante e igual a 1.

2. Considere a superfície

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 4 - x^2 - y^2,\ y > 0,\ z > 0\},$$

orientada com o campo de normais unitárias n, tal que $n_z > 0$. Seja $f(x,y,z) = (x, y, -2z)$.

(3.5 val.) a) Calcule o fluxo de f através de S no sentido de n usando a definição.

(3.5 val.) b) Utilize o teorema de Stokes para calcular o fluxo $\int_S \operatorname{rot} f \cdot n$.

(3 val.) c) Calcule o trabalho do campo

$$h(x,y,z) = \left(\frac{-2(y-1)}{x^2 + (y-1)^2} - y, \frac{2x}{x^2 + (y-1)^2} + x + z, y \right),$$

ao longo do bordo de S, percorrido no sentido anti-horário relativamente ao ponto $(0,1,10)$.

(3 val.) 3. Seja $\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ um campo escalar contínuo.

Diz-se que um campo escalar $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 satisfaz a equação de Poisson associada a α no conjunto $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$ se

$$\operatorname{div} \nabla \phi = \alpha.$$

Sabendo que dado α existe sempre uma solução da equação de Poisson em B , mostre que se $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é um campo vectorial de classe C^1 então $f = \operatorname{rot} h + \nabla \varphi$ em B, para algum campo vectorial h e algum campo escalar φ de classe C^2 em $\mathbb{R}^3$.