

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II
LMAC, MEBIOM, MEFT
TESTE 2 – VERSÃO 2 – 15 DE JUNHO DE 2009 – DURAÇÃO: 90 MINUTOS

Apresente e justifique todos os cálculos

(1) Considere o conjunto $B \subset \mathbb{R}^3$ definido por

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq x^2 + y^2, x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

(3 val.)

a) Escreva uma expressão para o volume de B da forma $\int \dots (\int \dots (\int \dots dx) dy) dz$.

(3 val.)

b) Calcule o volume de B .

(2) Seja A a superfície

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y^2 + z^2, 1 \leq x \leq 4\},$$

orientada com a normal unitária n , com $n_x < 0$. Calcule o fluxo do campo vectorial $f(x, y, z) = (-x^2, xy, xz)$ através de A no sentido de n :

(3 val.)

a) Pela definição de fluxo.

(2 val.)

b) Utilizando o teorema da divergência.

(3 val.)

c) Utilizando o teorema de Stokes.

(3 val.)

(3) Considere o campo vectorial

$$h(x, y, z) = \left(-y^3 + \frac{5x}{x^2 + y^2}, x^3 + \frac{5y}{x^2 + y^2}, 2z \right).$$

Calcule o trabalho de h ao longo do caminho fechado $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, \cos \frac{t}{2})$, $t \in [0, 4\pi]$.

(3 val.)

(4) Seja $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z), z \in \mathbb{R}\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ um campo vectorial de classe C^1 , tal que existem campos vectoriais de classe C^2 , h e h' , com $\text{rot } h = \text{rot } h' = f$ no domínio de f . Mostre que existe um campo escalar α e um $a \in \mathbb{R}$ tal que

$$h' = h + \nabla \alpha + a \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right).$$