

Cálculo Diferencial e Integral II  
Teste 2 - 15 de Janeiro de 2011 - 9h - Versão 2  
Duração: 90 minutos

**Apresente e justifique todos os cálculos**

1. Considere o sólido

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < z^2, 1 < z < 2\}.$$

- (3 val.) (a) Escreva uma expressão para o volume de  $A$  como uma soma de integrais iterados da forma  $\int (\int (\int dx) dy) dz$ .
- (3 val.) (b) Calcule o volume de  $A$  utilizando uma mudança de coordenadas apropriada.
- (3 val.) (c) Calcule a área da fronteira de  $A$ .

2. Indique, justificando, se cada uma das afirmações seguintes é verdadeira ou falsa:

- (1 val.) (a) O campo vectorial  $F(x, y) = (x - y, x + y)$  é um campo fechado.
- (1 val.) (b) O campo vectorial  $F(x, y) = (x - y, x + y)$  é um campo gradiente.
- (1 val.) (c) Todo o campo fechado em  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$  é gradiente.
- (1 val.) (d) Todo o campo fechado em  $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, 0) : x \in \mathbb{R}\}$  é gradiente.

3. Considere o campo vectorial

$$G(x, y, z) = (-x, -y, 2z)$$

e a superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 2, 0 < z < 1\}.$$

Calcule o fluxo de  $G$  através de  $S$ , segundo a normal com terceira componente positiva, usando:

- (2 val.) (a) O Teorema da Divergência;
- (2 val.) (b) O Teorema de Stokes.

- (3 val.) 4. Seja  $M \subset \mathbb{R}^3$  uma superfície e  $H : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  um campo vectorial de classe  $C^1$  ortogonal a  $M$  (ou seja,  $H(x) \in T_x^\perp M$  para todo o  $x \in M$ ). Mostre que  $\text{rot } H$  é um campo vectorial tangente a  $M$  em cada ponto.