Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 2 (versão 1) - 9 de Janeiro de 2017 - 14h
Duração: 90 minutos
Todos os cursos do IST

Apresente e justifique todos os cálculos

(2 val.) 1. Mostre que existe uma vizinhança U do ponto $(1,0)$ e uma vizinhança V do ponto $(1,1)$ tais que a função $F : U \to V$, definida por $F(x,y) = (x+y, x^5+y^3)$, tem inversa de classe C^1. Calcule $DF^{-1}(1,1)$.

2. Considere o conjunto

$$L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + xy + y^2 = 1\}$$

(1 val.) (a) Mostre que L é uma variedade e determine a respectiva dimensão.

(2 val.) (b) Determine um vector normal e um vector tangente a L no ponto $(0,1)$, ambos não nulos.

(2 val.) (c) Determine os pontos de L mais afastados da origem.

(3 val.) 3. Considere o campo vectorial

$$h(x,y) = (\cos x, y^2).$$

Calcule o trabalho de h ao longo do caminho $\alpha(t) = (\operatorname{sen}^2(t), t^3)$, $t \in [0, 2\pi]$.

4. Seja S a superfície dada por

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2 - 1\,;\ z \leq 0\}.$$

(2 val.) (a) Calcule a massa de S considerando a densidade de massa $\sigma(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{2+z+3(x^2+y^2)}}$.

(3 val.) (b) Aplique o teorema da divergência para calcular o fluxo do campo

$$f(x,y,z) = (-x+y^2, xz^2, z)$$

atrav?s de S no sentido da normal n tal que $n_z < 0$.

(2 val.) (c) Mostre que f é o rotacional do campo $A(x,y,z) = (0, xz, \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{2}x^2z^2)$, e calcule o fluxo da alínea anterior usando o teorema de Stokes.

(3 val.) 5. Demonstre o teorema da função inversa usando o teorema da função implícita.

Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 2 (versão 2) - 9 de Janeiro de 2017 - 14h
Duração: 90 minutos
Todos os cursos do IST

Apresente e justifique todos os cálculos

(2 val.) 1. Mostre que existe uma vizinhança U do ponto $(0,1)$ e uma vizinhança V do ponto $(1,2)$ tais que a função $F : U \to V$, definida por $F(x,y) = (x^5 + y^3, x + y + 1)$, tem inversa de classe C^1. Calcule $DF^{-1}(1,2)$.

2. Considere o conjunto

$$L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - xy + y^2 = 4\}$$

(1 val.) (a) Mostre que L é uma variedade e determine a respectiva dimensão.

(2 val.) (b) Determine um vector normal e um vector tangente a L no ponto $(2,0)$, ambos não nulos.

(2 val.) (c) Determine os pontos de L mais próximos da origem.

(3 val.) 3. Considere o campo vectorial

$$h(x,y) = (xy^2, x^2y).$$

Calcule o trabalho de h ao longo do caminho $\alpha(t) = (t^2, \operatorname{sen}(t))$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

4. Seja S a superfície dada por

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 4 - x^2 - y^2 \,;\, z \geq 0\}.$$

(2 val.) (a) Calcule a massa de S considerando a densidade de massa $\sigma(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{17-4z}}$.

(3 val.) (b) Aplique o teorema da divergência para calcular o fluxo do campo

$$f(x,y,z) = (yz^2, -3y + x^2, 3z)$$

atrav?s de S no sentido da normal n tal que $n_z > 0$.

(2 val.) (c) Mostre que f é o rotacional do campo $A(x,y,z) = (-3yz, 0, \frac{1}{2}y^2z^2 - \frac{1}{3}x^3)$, e calcule o fluxo da alínea anterior usando o teorema de Stokes.

(3 val.) 5. Demonstre o teorema da função inversa usando o teorema da função implícita.

Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 2 (versão 1) - 9 de Janeiro de 2017 - 16h
Duração: 90 minutos
Todos os cursos do IST

Apresente e justifique todos os cálculos

(2 val.) 1. Mostre que a equação $ze^{x(y+z)} = 2$, em $\mathbb{R}^3$, define z como função de x e y, ou seja, $z = f(x,y)$, de classe C^1, numa vizinhança do ponto $(0,0,2)$. Calcule $\nabla f(0,0)$.

2. Considere o conjunto

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\,;\, x + y + z^2 = 1\}.$$

(1 val.) (a) Mostre que M é uma variedade e determine a respectiva dimensão.

(2 val.) (b) Determine uma base para o espaço tangente a M no ponto $(1,0,0)$.

(2 val.) (c) Determine o ponto de M com maior coordenada x.

(3 val.) 3. Considere o campo vectorial

$$f(x,y) = \left(\frac{3y}{x^2+y^2}, \frac{-3x}{x^2+y^2}\right).$$

Seja E a elipse definida pela equação $2x^2 + 3y^2 = 1$. Calcule o trabalho de f ao longo de E percorrida no sentido anti-horário.

4. Seja S a superfície dada por

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2\sqrt{x^2+y^2}\,;\, z \leq 4\}.$$

(2 val.) (a) Calcule a área de S.

(3 val.) (b) Aplique o teorema da divergência para calcular o fluxo do campo

$$f(x,y,z) = (-xz + y, e^{x+z}, z^2/2)$$

através de S no sentido da normal n tal que $n_z < 0$.

(2 val.) (c) Considere o campo $A(x,y,z) = (y\alpha(z), -x\alpha(z), z^5 e^x)$, e a função α de classe C^1 tal que $\alpha(4) = 3$.

Calcule o fluxo de $\operatorname{rot} A$ através de S no sentido da normal n da alínea anterior, usando o teorema de Stokes.

(3 val.) 5. Demonstre o teorema da função implícita usando o teorema da função inversa.

Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 2 (versão 2) - 9 de Janeiro de 2017 - 16h

Duração: 90 minutos

Todos os cursos do IST

Apresente e justifique todos os cálculos

(2 val.) 1. Mostre que a equação $xe^{(x+y)z} = 2$, em $\mathbb{R}^3$, define x como função de y e z, ou seja, $x = g(y,z)$, de classe C^1, numa vizinhança do ponto $(2,0,0)$. Calcule $\nabla g(0,0)$.

2. Considere o conjunto

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\,;\, x + y + z^2 = 1\}.$$

(1 val.) (a) Mostre que M é uma variedade e determine a respectiva dimensão.

(2 val.) (b) Determine uma base para o espaço tangente a M no ponto $(0,1,0)$.

(2 val.) (c) Determine os pontos de M com menor coordenada y.

(3 val.) 3. Considere o campo vectorial

$$f(x,y) = \left(\frac{-2y}{x^2+y^2}, \frac{2x}{x^2+y^2}\right).$$

Seja E a elipse definida pela equação $2x^2 + 4y^2 = 1$. Calcule o trabalho de f ao longo de E, percorrida no sentido horário.

4. Seja S a superfície dada por

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 4 - 2\sqrt{x^2+y^2}\,;\, z \geq 0\}.$$

(2 val.) (a) Calcule a área de S.

(3 val.) (b) Aplique o teorema da divergência para calcular o fluxo do campo

$$f(x,y,z) = (e^{y+z}, yz + x, 3 - z^2/2)$$

através de S no sentido da normal n tal que $n_z > 0$.

(2 val.) (c) Considere o campo $A(x,y,z) = (-y\beta(z), x\beta(z), z^4e^y)$, e a função β de classe C^1 tal que $\beta(0) = 3$.
Calcule o fluxo de $\operatorname{rot} A$ através de S no sentido da normal n da alínea anterior, usando o teorema de Stokes.

(3 val.) 5. Demonstre o teorema da função implícita usando o teorema da função inversa.