Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 2 (versão 1) - 8 de Junho de 2015 - 09h00
Duração: 90 minutos
Todos os cursos excepto LMAC, MEFT e MEBiom

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere o conjunto

$$M = \{ \ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y + z^2 = 0 \ , \ x + y + z = 0 \ \} \ .$$

(1.5 val.) a) Mostre que M é uma variedade e calcule a sua dimensão.

(1.5 val.) b) Obtenha bases do espaço tangente e do espaço normal a M no ponto $(1, -2, 1)$.

2. Considere a 2-variedade $S = \{ \ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + xy + y^2 + z^2 = 3 \ \}$.

(2 val.) a) Mostre que numa vizinhança do ponto $(1,1,0)$ a condição $(x,y,z) \in S$ pode ser resolvida em ordem a x como função de classe C^1 de (y,z) e calcule $\frac{\partial x}{\partial y}(1,0)$.

(2 val.) b) Calcule o máximo absoluto da função $f(x,y,z) = y$ em S.

3. Considere o campo vectorial

$$F(x,y,z) = \left(\frac{x}{x^2+z^2} \ , \ y \ , \ \frac{z}{x^2+z^2} \right) \ .$$

(1.5 val.) a) Determine se F é um gradiente no seu domínio.

(1.5 val.) b) Calcule o trabalho de F ao longo do caminho $\gamma(t) = (\cos t, e^t, \operatorname{sen} t)$, $t \in [0, 4\pi]$.

4. Considere a superfície definida por

$$A = \{ \ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ y = 1 + \sqrt{x^2+z^2} \ , \ x^2 + z^2 < 4 \ \} \ ,$$

orientada segundo a normal unitária n com $n_y < 0$.

(2 val.) a) Calcule a área de A.

(2.5 val.) b) Utilizando o teorema de Stokes, calcule o fluxo de $G(x,y,z) = (xy, -y^2 + 1, yz)$ através de A no sentido de n.

(2.5 val.) c) Calcule o fluxo de $H(x,y,z) = (2xz^2, y, -\frac{2z^3}{3})$ através de A no sentido de n.

(3 val.) 5. Seja $g : I \to \mathbb{R}^2$ a função de classe C^∞ definida no intervalo $I =]0, 2\pi[$ pela expressão $g(t) = (\operatorname{sen} t, \operatorname{sen}(2t))$ e seja $L = \{g(t) \in \mathbb{R}^2 : t \in I\}$. Mostre que g é uma função injectiva e que $\frac{dg}{dt}(t) \neq 0$ para qualquer $t \in I$, mas que $g^{-1} : L \to I$ não é contínua. O conjunto L será uma variedade? Justifique cuidadosamente.

Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 2 (versão 2) - 8 de Junho de 2015 - 09h00
Duração: 90 minutos
Todos os cursos excepto LMAC, MEFT e MEBiom

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere o conjunto

$$M = \{ \ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2+y^2+z=0 \ , \ x+y+z=0 \ \} \ .$$

(1.5 val.) a) Mostre que M é uma variedade e calcule a sua dimensão.

(1.5 val.) b) Obtenha bases do espaço tangente e do espaço normal a M no ponto $(1,1,-2)$.

2. Considere a 2-variedade $S = \{ \ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2+y^2+2yz+2z^2=2 \ \}$.

(2 val.) a) Mostre que numa vizinhança do ponto $(0,0,1)$ a condição $(x,y,z) \in S$ pode ser resolvida em ordem a y como função de classe C^1 de (x,z) e calcule $\frac{\partial y}{\partial z}(0,1)$.

(2 val.) b) Calcule o máximo absoluto da função $h(x,y,z)=z$ em S.

3. Considere o campo vectorial

$$G(x,y,z) = \left(x^2 \ , \ \frac{y}{y^2+z^2} \ , \ \frac{z}{y^2+z^2} \right) \ .$$

(1.5 val.) a) Determine se G é um gradiente no seu domínio.

(1.5 val.) b) Calcule o trabalho de G ao longo do caminho $\alpha(t) = (t^2, \cos t, \operatorname{sen} t)$, $t \in [0,4\pi]$.

4. Considere a superfície definida por

$$B = \{ \ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x = 1+\sqrt{y^2+z^2} \ , \ y^2+z^2<4 \ \} \ ,$$

orientada segundo a normal unitária n com $n_x<0$.

(2 val.) a) Calcule a área de B.

(2.5 val.) b) Utilizando o teorema de Stokes, calcule o fluxo de $F(x,y,z) = (-x^2+2, xy, xz)$ através de B no sentido de n.

(2.5 val.) c) Calcule o fluxo de $H(x,y,z) = (2x, yz^2, -z-\frac{z^3}{3})$ através de B no sentido de n.

(3 val.) 5. Seja $g : I \to \mathbb{R}^2$ a função de classe C^∞ definida no intervalo $I =]0,2\pi[$ pela expressão $g(t) = (\operatorname{sen} t, \operatorname{sen}(2t))$ e seja $L = \{g(t) \in \mathbb{R}^2 : t \in I\}$. Mostre que g é uma função injectiva e que $\frac{dg}{dt}(t) \neq 0$ para qualquer $t \in I$, mas que $g^{-1} : L \to I$ não é contínua. O conjunto L será uma variedade? Justifique cuidadosamente.

Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 2 (versão 1) - 8 de Junho de 2015 - 11h30
Duração: 90 minutos
Todos os cursos excepto LMAC, MEFT e MEBiom

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Seja $M = \{ \ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^3+y^3+z^3 = 0 \ , \ x+y+z=0 \ ; \ x<y \ \}$.

(1.5 val.) a) Mostre que M é uma variedade e calcule a sua dimensão.

(1.5 val.) b) Obtenha bases do espaço tangente e do espaço normal a M no ponto $(0,1,-1)$.

(2.5 val.) c) Mostre que numa vizinhança do ponto $(0,1,-1)$ a condição $(x,y,z) \in M$ pode ser resolvida em ordem a (x,y) como função f de classe C^1 de z e calcule $\frac{df}{dz}(-1)$.

(2 val.) 2. Calcule o valor máximo da função $f(x,y) = x+y$ na variedade

$$L = \{ \ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+xy+y^2 = 3 \ \} \ .$$

3. Considere o campo vectorial $F(x,y) = (-y+e^{x+y}, x+y+e^{x+y})$.

(1 val.) a) Determine se F é um gradiente no seu domínio.

(1.5 val.) b) Calcule o trabalho de F ao longo da curva $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 1\}$ orientada no sentido anti-horário.

4. Considere a superfície definida por

$$S = \{ \ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2+y^2+z^2 = 1 \ , \ z>0 \ \} \ ,$$

orientada segundo a normal unitária n com $n_z > 0$.

(2.5 val.) a) Utilizando o teorema de Stokes, calcule o fluxo de $H(x,y,z) = (xz, yz, -z^2+1)$ através de S no sentido de n.

(2.5 val.) b) Calcule o fluxo de $F(x,y,z) = (x+y^3, y, z)$ através de S no sentido de n.

(2.0 val.) 5. Utilizando o teorema de Stokes, calcule o trabalho de $G(x,y,z) = (-y, x, z^2)$ ao longo de $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = 1, z = 0\}$ orientada no sentido anti-horário quando vista do ponto $(0,0,10)$.

(3 val.) 6. Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ uma variedade-m (com $n > m$), $U \subset \mathbb{R}^m$ aberto, e $g : U \to M$ uma função de classe C^1 tal que Dg tem característica igual a m em todos os pontos de U. Mostre que, para qualquer função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^1 e qualquer $x = g(u) \in M$, o gradiente $\nabla f(x)$ pertence ao espaço normal a M em x se e só se u for um ponto crítico de $f \circ g$. Mostre por meio de um exemplo que se a característica de Dg for diferente de m é possível u ser um ponto crítico de $f \circ g$ sem que $\nabla f(x)$ pertença ao espaço normal.

Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 2 (versão 2) - 8 de Junho de 2015 - 11h30
Duração: 90 minutos
Todos os cursos excepto LMAC, MEFT e MEBiom

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Seja $M = \{ \ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^3 - y^3 + z^3 = 0 \ , \ x - y + z = 0 \ ; \ x < y \ \}$.

(1.5 val.) a) Mostre que M é uma variedade e calcule a sua dimensão.

(1.5 val.) b) Obtenha bases do espaço tangente e do espaço normal a M no ponto $(-1, 0, 1)$.

(2.5 val.) c) Mostre que numa vizinhança do ponto $(-1, 0, 1)$ a condição $(x, y, z) \in M$ pode ser resolvida em ordem a (y, z) como função f de classe C^1 de x e calcule $\frac{df}{dx}(-1)$.

(2 val.) 2. Calcule o valor máximo da função $h(x, y) = x + 2y$ na variedade

$$C = \{ \ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2xy + 4y^2 = 12 \ \} \ .$$

3. Considere o campo vectorial

$$F(x, y) = \left(y + 2x + \frac{2x}{1 + x^2 + y^2} \ , \ -x + \frac{2y}{1 + x^2 + y^2} \right) \ .$$

(1 val.) a) Determine se F é um gradiente no seu domínio.

(1.5 val.) b) Calcule o trabalho de F ao longo da curva $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ orientada no sentido anti-horário.

4. Considere a superfície definida por $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z < 0\}$, orientada segundo a normal unitária n com $n_z < 0$.

(2.5 val.) a) Utilizando o teorema de Stokes, calcule o fluxo de $F(x, y, z) = (x, y, -2z + 1)$ através de S no sentido de n.

(2.5 val.) b) Calcule o fluxo de $G(x, y, z) = (y^2 - x, y + x^5, 3z)$ através de S no sentido de n.

(2.0 val.) 5. Utilizando o teorema de Stokes, calcule o trabalho de $H(x, y, z) = (x^3, 3x, z)$ ao longo da curva $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$ orientada no sentido horário quando vista do ponto $(0, 0, 10)$.

(3 val.) 6. Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ uma variedade-m (com $n > m$), $U \subset \mathbb{R}^m$ aberto, e $g : U \to M$ uma função de classe C^1 tal que Dg tem característica igual a m em todos os pontos de U. Mostre que, para qualquer função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^1 e qualquer $x = g(u) \in M$, o gradiente $\nabla f(x)$ pertence ao espaço normal a M em x se e só se u for um ponto crítico de $f \circ g$. Mostre por meio de um exemplo que se a característica de Dg for diferente de m é possível u ser um ponto crítico de $f \circ g$ sem que $\nabla f(x)$ pertença ao espaço normal.