Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II
MEBIOM
TESTE 1 – 14 DE ABRIL DE 2008 – DURAÇÃO: 90 MINUTOS

Apresente e justifique todos os cálculos

(1) Seja

$$h(x,y) = \begin{cases} \operatorname{sen}\left(\frac{x^2+y^2}{x^2+y^3}\right), & (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ a, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(2 val.) Determine um valor de $a \in \mathbb{R}$, ou mostre que ele não existe, tal que h seja contínua na origem.

(3 val.) (2) Seja $f(x,y,z) = x^2 + 2xy + 3y - e^{z^2}$. Determine e classifique os pontos críticos de f.

(3) Considere o conjunto $P \subset \mathbb{R}^3$ definido por:

$$P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2x^2 + 3y^2\}.$$

(2 val.) a) Mostre que P é uma variedade e determine a sua dimensão.

(2 val.) b) Determine a equação do plano tangente a P no ponto $(1,1,5) \in P$.

(2 val.) c) Mostre que, numa vizinhança do ponto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{5}{6}) \in P$, é possível descrever P como o gráfico de uma função de classe C^1 da forma $y = f(x,z)$, definida numa vizinhança aberta do ponto $(\frac{1}{2}, \frac{5}{6})$.

(2.5 val.) d) Calcule $Df(\frac{1}{2}, \frac{5}{6})$, onde f é a função da alínea anterior.

(2 val.) e) Será o ponto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{5}{6})$ um máximo local para os valores da função $g(x,y,z) = y$ sobre P ?

(2 val.) (4) Seja k um inteiro positivo. Uma função de classe C^1, $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diz-se *homogénea de grau k* se $h(tx,ty) = t^k h(x,y), \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}$. Mostre que se h é homogénea de grau k então

$$x\frac{\partial h}{\partial x} + y\frac{\partial h}{\partial y} = kh.$$

(2.5 val.) (5) Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $f : D \to \mathbb{R}$ um campo escalar de classe C^1. Considere um caminho de classe C^1, $\gamma : [0,1] \to D$ tal que $\gamma(0) = p, \gamma(1) = q$. Mostre que $\exists c \in [0,1]$ tal que $f(q) - f(p) = \nabla f(\gamma(c)) \cdot \gamma'(c)$.