Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 1 (versão 2) - 22 de Abril de 2017 - 09h00
Duração: 90 minutos
Todos os cursos excepto LMAC, MEFT e MEBiom

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere a função $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x,y) = \begin{cases} \operatorname{sen}\left(\dfrac{2x^3}{x^2+3y^2}\right), & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

[2,0] a) Determine o conjunto de pontos em que a função g é contínua.

[2,0] b) Calcule $\dfrac{\partial g}{\partial x}(0,0)$, $\dfrac{\partial g}{\partial y}(0,0)$, a derivada de g na origem segundo o vector $(-1,1)$, e mostre que g não é diferenciável na origem.

[2,0] 2. Seja $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ a função definida por $g(x,y,z) = e^{x(z^2+y)}$ e $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ uma função de classe C^1 tal que $h(1,2) = (0,1,-1)$ e

$$Dh(1,2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Calcule a derivada de $g \circ h$ no ponto $(1,2)$ segundo o vector $(4,3)$.

[2,5] 3. Determine e classifique os pontos de estacionaridade da função $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x,y) = 2x^2 - x^4 - 2y + y^2.$$

[2,5] 4. Seja $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Escreva o integral $\int_0^{\pi/4} \left(\int_{\operatorname{sen} x}^{\cos x} h(x,y)\, dy \right) dx$ em termos de integrais iterados da forma $\int \left(\int \cdots dx \right) dy$.

[3,0] 5. Considere o conjunto definido por

$$T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x < 1,\ y > 0,\ z > 0,\ x + y + 3z < 3\}.$$

Escreva expressões para o volume de T em termos de integrais iterados da forma $\int(\int(\int dz)dy)dx$ e da forma $\int(\int(\int dy)dx)dz$.

[3,0] 6. Considere o sólido

$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 1,\ y > 0,\ z > 0\}.$$

Usando uma mudança de coordenadas apropriada, calcule a massa de C sabendo que a função densidade de massa é dada por $\sigma(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

[3,0] 7. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^4 com um ponto crítico a no qual a matriz Hessiana é nula. Classifique o ponto crítico, sabendo que $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(a) \neq 0$.