Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 1 (versão 1) - 22 de Abril de 2017 - 09h00
Duração: 90 minutos
Todos os cursos excepto LMAC, MEFT e MEBiom

(Resolução abreviada)

1. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \operatorname{sen}\left(\dfrac{3y^3}{2x^2+y^2}\right), & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

[2,0] a) Determine o conjunto de pontos em que a função f é contínua.

Resposta:

Notando que $\dfrac{3|y|^3}{2x^2+y^2} \leq 3|y|$, fica claro que f é contínua na origem e invocando as propriedades das funções contínuas conclui-se que f é contínua em $\mathbb{R}^2$.

[2,0] b) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$, a derivada de f na origem segundo o vector $(1,1)$, e mostre que f não é diferenciável na origem.

Resposta:

Dado que $f(x,0) = f(0,0) = 0$, tem-se $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$.

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(3t)}{t} = 3.$

Fazendo $v = (1,1)$ tem-se,

$$D_v f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen}(t)}{t} = 1.$$

Se f fosse diferenciável na origem ter-se-ia:

$$1 = D_v f(0,0) = Df(0,0)v = 3.$$

Portanto f não é diferenciável na origem.

[2,0] 2. Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x,y,z) = e^{z(y^2+x)}$ e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ uma função de classe C^1 tal que $g(2,1) = (1,1,0)$ e

$$Dg(2,1) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Calcule a derivada de $f \circ g$ no ponto $(2,1)$ segundo o vector $(3,2)$.

Resposta:

Seja $v = (3, 2)$.

$$D_v(f \circ g)(2,1) = Df(1,1,0)Dg(2,1)v = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = 6$$

[2,5] 3. Determine e classifique os pontos de estacionaridade da função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = x^2 - 2x + 2y^2 - y^4.$$

Resposta:

Pontos de estacionaridade: $(1, 0),\ (1, -1),\ (1, 1)$ obtidos de

$$\nabla f(x, y) = (2x - 2, 4y - 4y^3) = (0, 0).$$

Classificação dos pontos de estacionaridade:

Da matriz Hessiana

$$H(x, y) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 - 12y^2 \end{bmatrix}$$

tem-se

$$H(1, 0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad H(1, \pm 1) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}$$

e, portanto, $(1, 0)$ é ponto de mínimo de f e $(1, -1),\ (1, 1)$ são pontos de sela de f.

[2,5] 4. Seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Escreva o integral $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \left(\int_{\cos x}^{\operatorname{sen} x} g(x, y)\, dy \right) dx$ em termos de integrais iterados da forma $\int \left(\int \cdots dx \right) dy$.

Resposta:

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\int_{\arccos y}^{\frac{\pi}{2}} g(x, y)\, dx \right) dy + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \left(\int_{\operatorname{arcsen} y}^{\frac{\pi}{2}} g(x, y)\, dx \right) dy$$

[3,0] 5. Considere o conjunto definido por

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0,\ 0 < y < 1,\ z > 0,\ x + y + 4z < 4\}.$$

Escreva expressões para o volume de S em termos de integrais iterados da forma $\int (\int (\int dz) dx) dy$ e da forma $\int (\int (\int dx) dy) dz$.

Resposta:

$$\operatorname{vol}(S) = \int_0^1 \left(\int_0^{4-y} \left(\int_0^{1 - \frac{x}{4} - \frac{y}{4}} 1\, dz \right) dx \right) dy$$

$$\operatorname{vol}(S) = \int_0^{\frac{3}{4}} \left(\int_0^1 \left(\int_0^{4-y-4z} 1\, dx \right) dy \right) dz \ + \ \int_{\frac{3}{4}}^{1} \left(\int_0^{4-4z} \left(\int_0^{4-y-4z} 1\, dx \right) dy \right) dz$$

[3,0] 6. Considere o sólido

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 < x^2 + y^2 + z^2 < 4,\ y > 0\}.$$

Usando uma mudança de coordenadas apropriada, calcule a massa de B sabendo que a função densidade de massa é dada por $\sigma(x,y,z) = \dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}$.

Resposta:

$$\left\{\begin{array}{lcll} x & = & r \operatorname{sen}\theta \cos\varphi & r \in\,]1,2[\\ y & = & r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi & \theta \in\,]0,\pi[\\ z & = & r\cos\theta & \varphi \in\,]0,\pi[\quad (\text{porque } y > 0) \end{array}\right.$$

$$\text{Massa} = \int_B \sigma = \int_0^\pi \left(\int_0^\pi \left(\int_1^2 \frac{1}{r^2} r^2 \operatorname{sen}\theta \, dr \right) d\theta \right) d\varphi = 2\pi$$

[3,0] 7. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^4 com um ponto crítico a no qual a matriz Hessiana é nula. Classifique o ponto crítico, sabendo que $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(a) \neq 0$.

Resposta:

Seja $v = (1,0)$ e $g(t) = f(a+tv),\ t \in \mathbb{R}$.

Dado que a é ponto crítico de f no qual a matriz Hessiana é nula, tem-se

$$g(t) - g(0) = \frac{1}{3!} A t^3 + o(t^3)$$

em que $A = \dfrac{\partial^3 f}{\partial x^3}(a)$.

Assim,

$$\frac{g(t)-g(0)}{t^3} = \frac{A}{6} + \frac{o(t^3)}{t^3}$$

e, portanto, o sinal de $g(t) - g(0)$ com $t < 0$ é oposto ao sinal de $g(t) - g(0)$ com $t > 0$.

Sendo $f(a+tv) - f(a) = g(t) - g(0)$ conclui-se que a é ponto de sela de f.