Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 1 (versão 2) - 22 de Abril de 2017 - 11h30
Duração: 90 minutos
Todos os cursos excepto LMAC, MEFT e MEBiom

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere a função $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^5(x+y^2)}{x^4+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

[2,0] a) Calcule as derivadas $\dfrac{\partial g}{\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial g}{\partial y}(0,0)$.

[2,0] b) Determine o conjunto de pontos em que a função g é diferenciável.

2. Seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável.

[1,0] a) Supondo que a derivada de g no ponto $(0,0)$ segundo o vector $(2,-1)$ é 4, e segundo o vector $(1,2)$ é 7, calcule $\nabla g(0,0)$.

[1,0] b) Seja $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $h(t) = g(t^2, t)$. Justifique que h é diferenciável e determine $h'(1)$ sabendo que $\nabla g(1,1) = (-1,4)$.

[2,5] 3. Determine e classifique os pontos de estacionaridade da função $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x,y) = 2x^4 - x^2 - 2y + y^2.$$

[2,5] 4. Sendo $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função contínua, escreva o integral $\int_0^1 \left(\int_{-x^2}^{x} h(x,y)dy \right) dx$ em termos de integrais iterados da forma $\int \left(\int \cdots dx \right) dy$.

5. Considere o conjunto definido por

$$T = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2} - 1 < z < 1 - x^2 - y^2 \right\}.$$

[3,0] a) Escreva expressões para o volume de T em termos de integrais iterados da forma $\int (\int (\int dz) dx) dy$ e da forma $\int (\int (\int dy) dx) dz$.

[3,0] b) Calcule o volume de T, usando uma mudança de variáveis apropriada.

[3,0] 6. Seja $B_R(\mathbf{0}) = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \cdots + x_n^2 < R^2 \right\}$ a n-bola de raio $R > 0$. Mostre que para qualquer $n \in \mathbb{N}$ o n-volume de $B_R(\mathbf{0})$ é igual a

$$\left(\prod_{i=1}^{n} \int_0^{\pi} (\operatorname{sen} \psi)^i \, d\psi \right) R^n \ .$$

[Sugestão: verifique que a função $g : \mathbb{R}^n \times]0,\pi[\to \mathbb{R}^{n+1}$ definida por $g(x_1, \ldots, x_n, \psi) = (x_1, \ldots, x_n, R\cos\psi)$ é uma mudança de variáveis e use indução em n.]