Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 1 (versão 1) - 22 de Abril de 2017 - 11h30
Duração: 90 minutos
Todos os cursos excepto LMAC, MEFT e MEBiom

(Resolução abreviada)

1. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3(x^2+y)}{x^2+y^4}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

[2,0] a) Calcule as derivadas $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

Resposta:
$\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{t^3}{t} = 0.$
Dado que $f(0,y) = f(0,0) = 0$, tem-se $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

[2,0] b) Determine o conjunto de pontos em que a função f é diferenciável.

Resposta:
Notando que

$$\frac{|f(x,y)|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x^2}{x^2+y^4}\frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}(x^2+|y|) \leq x^2+|y|$$

e tendo em conta a alínea anterior, conclui-se que f é diferenciável na origem. Invocando as propriedades das funções diferenciáveis, f é diferenciável em qualquer ponto $(x,y) \neq (0,0)$. Portanto, f é diferenciável em $\mathbb{R}^2$.

2. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável.

[1,0] a) Supondo que a derivada de f no ponto $(1,1)$ segundo o vector $(1,2)$ é 5, e segundo o vector $(-2,1)$ é 10, calcule $\nabla f(1,1)$.

Resposta:
Sendo $\nabla f(1,1) = (a,b)$, tem-se

$$\begin{cases} a+2b = 5 \\ -2a+b = 10 \end{cases}$$

ou seja, $\nabla f(1,1) = (-3,4)$.

[1,0] b) Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $g(t) = f(t,t^2)$. Justifique que g é diferenciável e determine $g'(2)$ sabendo que $\nabla f(2,4) = (3,5)$.

Resposta:
A função $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida por $h(t) = (t, t^2)$ é diferenciável e, pelo teorema da função composta, a função $g = f \circ h$ é também diferenciável e tem-se

$$g'(2) = \nabla f(2,4)h'(2) = (3,5) \cdot (1,4) = 23.$$

[2,5] 3. Determine e classifique os pontos de estacionaridade da função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = x^2 - 2x - y^2 + 2y^4.$$

Resposta:
Pontos de estacionaridade: $(1,0),\ (1,-\frac{1}{2}),\ (1,\frac{1}{2})$ obtidos de

$$\nabla f(x,y) = (2x-2, -2y+8y^3) = (0,0).$$

Classificação dos pontos de estacionaridade:
Da matriz Hessiana

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2+24y^2 \end{bmatrix}$$

tem-se

$$H(1,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad H(1,\pm\frac{1}{2}) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

e, portanto, $(1,0)$ é ponto de sela de f e $(1,-\dfrac{1}{2}),\ (1,\dfrac{1}{2})$ são pontos de mínimo de f.

[2,5] 4. Sendo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função contínua, escreva o integral $\int_0^1 \left(\int_{-x}^{x^2} f(x,y)dy\right) dx$ em termos de integrais iterados da forma $\int \left(\int \cdots dx\right) dy$.

Resposta:

$$\int_{-1}^{0} \left(\int_{-y}^{1} f(x,y)\,dx\right) dy + \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{y}}^{1} f(x,y)\,dx\right) dy$$

5. Considere o conjunto definido por

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - 1 < z < 1 - \sqrt{x^2+y^2}\right\}.$$

[3,0] a) Escreva expressões para o volume de S em termos de integrais iterados da forma $\int(\int(\int dz)dy)dx$ e da forma $\int(\int(\int dx)dy)dz$.

Resposta:

$$\mathrm{vol}(S) = \int_{-1}^{1} \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \left(\int_{x^2+y^2-1}^{1-\sqrt{x^2+y^2}} 1\,dz\right) dy\right) dx$$

$$\mathrm{vol}(S) = \int_{-1}^{0} \left(\int_{-\sqrt{1+z}}^{\sqrt{1+z}} \left(\int_{-\sqrt{1+z-y^2}}^{\sqrt{1+z-y^2}} 1\,dx\right) dy\right) dz + \int_0^1 \left(\int_{z-1}^{1-z} \left(\int_{-\sqrt{(1-z)^2-y^2}}^{\sqrt{(1-z)^2-y^2}} 1\,dx\right) dy\right) dz$$

[3,0] b) Calcule o volume de S, usando uma mudança de variáveis apropriada.

Resposta:

$$\begin{cases} x &= \rho\cos\varphi & \varphi \in \left]0, 2\pi\right[\\ y &= \rho \operatorname{sen}\varphi & \rho > 0 \\ z &= z & \rho^2 - 1 < z < 1 - \rho \end{cases}$$

$$\operatorname{vol}(S) = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \left(\int_{\rho^2-1}^{1-\rho} \rho \, dz \right) d\rho \right) d\varphi = \frac{5}{6}\pi$$

[3,0] 6. Seja $B_R(\mathbf{0}) = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \cdots + x_n^2 < R^2 \right\}$ a n-bola de raio $R > 0$. Mostre que para qualquer $n \in \mathbb{N}$ o n-volume de $B_R(\mathbf{0})$ é igual a

$$\left(\prod_{i=1}^{n} \int_0^{\pi} (\operatorname{sen}\psi)^i \, d\psi \right) R^n \ .$$

[Sugestão: verifique que a função $g : \mathbb{R}^n \times \left]0, \pi\right[\to \mathbb{R}^{n+1}$ definida por $g(x_1, \ldots, x_n, \psi) = (x_1, \ldots, x_n, R\cos\psi)$ é uma mudança de variáveis e use indução em n.]

Resposta:

Para cada $n \in \mathbb{N}$ e cada $R > 0$ denotemos por B_R^n a n-bola de raio R centrada na origem, e por $V_n(B_R^n)$ o seu n-volume:

$$V_n(B_R^n) = \int_{B_R^n} 1 \ .$$

A base da indução é a afirmação, para $n = 1$, de que para qualquer $R > 0$ se tem

$$V_n(B_R^n) = \left(\prod_{i=1}^{n} \int_0^{\pi} (\operatorname{sen}\psi)^i \, d\psi \right) R^n \ ,$$

ou seja,

$$V_1(B_R^1) = \left(\int_0^{\pi} \operatorname{sen}\psi \, d\psi \right) R \ .$$

Então a base da indução é verdadeira, uma vez que $B_R^1 = \left]-R, R\right[$ e ambos os lados da equação anterior são iguais a $2R$.

Para o passo da indução assumiremos como hipótese que para um dado $n \in \mathbb{N}$ fixo se tem, para qualquer $R > 0$,

$$V_n(B_R^n) = \left(\prod_{i=1}^{n} \int_0^{\pi} (\operatorname{sen}\psi)^i \, d\psi \right) R^n \ ,$$

e usaremos esta hipótese para demonstrar que, também para qualquer $R > 0$, se tem

$$V_{n+1}(B_R^{n+1}) = \left(\prod_{i=1}^{n+1} \int_0^{\pi} (\operatorname{sen}\psi)^i \, d\psi \right) R^{n+1} \ ,$$

o que terminará a demonstração.

A condição

$$x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 < R^2$$

implica que os valores possíveis de x_{n+1} são os do intervalo $\left]-R, R\right[$. E, para cada $x_{n+1} \in \left]-R, R\right[$, a condição pode ser rescrita como

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 < R^2 - x_{n+1}^2 \ ,$$

e portanto é equivalente à asserção de que o vector $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ pertence à n-bola $B^n_{R'}$, em que $R' = \sqrt{R^2 - x^2_{n+1}}$.

Usando a mudança de variáveis g (com $\psi \in \,]0, \pi[$ e portanto $\operatorname{sen}\psi > 0$) obtém-se $R' = \sqrt{R^2 - (R\cos\psi)^2} = R\operatorname{sen}\psi$, e o Jacobiano é

$$|\det Dg(x_1, \ldots, x_n, \psi)| = \left|\det \left[\begin{array}{c|c} I_n & 0 \\ \hline 0 & -R\operatorname{sen}\psi \end{array}\right]\right| = R\operatorname{sen}\psi = R' \ .$$

(Nota: a função g é de facto uma mudança de variáveis porque é injectiva no domínio considerado — uma vez que o coseno é uma função estritamente decrescente no intervalo $]0, \pi[$ —, e é uma função de classe C^∞ cujo Jacobiano não se anula em nenhum ponto do domínio.)

Então, assumindo a hipótese de indução, temos

$$\begin{aligned}
V_{n+1}(B^{n+1}_r) &= \int_{-R}^{R} \left(\overbrace{\int \cdots \int 1\, dx_1 \ldots dx_n}^{V_n(B^n_{R'})} \right) dx_{n+1} \\
&= \int_0^\pi \left(\int \cdots \int 1\, dx_1 \ldots dx_n \right) R\operatorname{sen}\psi\, d\psi \\
&= \int_0^\pi V_n(B^n_{R\operatorname{sen}\psi}) R\operatorname{sen}\psi\, d\psi \\
&= \int_0^\pi \left[\overbrace{\left(\prod_{i=1}^{n} \int_0^\pi (\operatorname{sen}\xi)^i\, d\xi \right)}^{\text{Não depende de } \psi} (R\operatorname{sen}\psi)^n \right] R\operatorname{sen}\psi\, d\psi \\
&= \left(\prod_{i=1}^{n} \int_0^\pi (\operatorname{sen}\xi)^i\, d\xi \right) \int_0^\pi R^{n+1} (\operatorname{sen}\psi)^{n+1}\, d\psi \\
&= \left(\prod_{i=1}^{n+1} \int_0^\pi (\operatorname{sen}\psi)^i\, d\psi \right) R^{n+1} \ .
\end{aligned}$$