Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II
LMAC, MEBIOM, MEFT
TESTE 1 – VERSÃO 2 – 18 DE ABRIL DE 2009 – DURAÇÃO: 90 MINUTOS

Apresente e justifique todos os cálculos

(2 val.) (1) Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+(y-2)^2}{x^2+(y-2)^4}, & (x,y) \neq (0,2) \\ 0, & (x,y) = (0,2) \end{cases}.$$

Determine, justificando, se f é ou não diferenciável no ponto $(0,2)$.

(3 val.) (2) Determine e classifique os pontos críticos da função $h(x,y) = e^y(x^2+y)$.

(3) Considere o conjunto $M \subset \mathbb{R}^3$ definido por

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 3x^2+3y^2+z^2 = 7,\ x+y+2z = 4\}.$$

(3 val.) a) Justifique que, na vizinhança do ponto $(1,1,1)$, M é o gráfico de uma função de classe C^1 da forma $(y,z) = (f_1(x), f_2(x))$, definida numa vizinhança aberta de $x = 1$.

(3 val.) b) Calcule $Df(1)$.

(2.5 val.) c) Determine se o vector $(2,2,-2)$ é ou não tangente a M no ponto $(1,1,1)$.

(2 val.) d) Determine se os valores da função $\varphi(x,y,z) = y - x$ sobre M atingem ou não um mínimo local no ponto $(1,1,1)$.

(2 val.) (4) Seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2, tal que $g(0,0) = 0$ e tal que $(0,0)$ é ponto crítico de g com $H_g(0,0)$ definida negativa. Seja $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 tal que $\nabla h(0,0) = (1,-3)$.

Verifique que $\phi(x,y) = h(g(x,y), g(x,y))$ tem um ponto crítico na origem e classifique-o.

(2.5 val.) (5) Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ uma variedade-m tal que, na vizinhança de $p \in A$, A pode ser descrita simultâneamente como conjunto de nível da função de classe C^1 $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-m}$ e como conjunto de nível da função de classe C^1 $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-m}$, onde se tem que $DF(p)$ e $DG(p)$ têm ambas característica $(n-m)$.

Mostre que o espaço das linhas da matriz $DF(p)$ é igual ao espaço das linhas da matriz $DG(p)$. (Ou seja, mostre que a definição de espaço normal que viu na aula é independente da escolha de F.)