Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 1 - 12 de Abril de 2014 - Versão B
Duração: 9:00-10:30
Todos os cursos excepto LMAC, MEBiom, MEFT

Apresente e justifique todos os cálculos

(1 v) 1) Diga, justificadamente, se existe o $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(\pi x) + y^3}{x^2+y^2}$.

2) Seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^4}{x^2+3y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(2 v) (a) Estude a continuidade de g na origem.

(2 v) (b) Determine, caso existam, $\dfrac{\partial g}{\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial g}{\partial y}(0,0)$.

(3 v) 3) Sejam $f(x,y) = (xy, 2x+y^2)$ e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma função de classe C^2 tal que $g(0,1) = (1,1)$ e

$$Dg(0,1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & k \end{bmatrix}.$$

Sendo $h = f \circ g$, determine o valor de k para que

$$Dh(0,1) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

(3 v) 4) Determine e classifique os pontos críticos de

$$f(x,y,z) = 3x^2 + 2y^2 + z^2 - 2z + 2x + 2y + 1.$$

5) Considere o conjunto

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 2,\ x^2+y^2 \leq 1,\ x \geq 0, y \geq 0\}.$$

(3 v) a) Escreva uma expressão para o volume de A através de integrais da forma $\int(\int(\int\, dx)dy)dz$.

(3 v) b) Seja $f(x,y,z) = z$. Calcule o integral de f em A.

(3 v) 6) Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto tal que para $a, x \in D$ o segmento de recta que une a e x está contido em D. Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1. Mostre que

$$f(x) = f(a) + \int_0^1 \nabla f(a + t(x-a)) \cdot (x-a)\, dt.$$