

## Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 1 - 12 de Abril de 2014 - Versão B

Duração: 11:30-13:00

Todos os cursos excepto LMAC, MEBiom, MEFT

### Apresente e justifique todos os cálculos

(1 v) 1) Diga, justificadamente, se existe o  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\text{sen}(x^2)}{x^2 + y^2}$ .

2) Seja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 + y^3}{3x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

(2 v) (a) Estude a continuidade de  $f$  na origem.

(2 v) (b) Determine a derivada de  $f$  no ponto  $(0, 0)$  segundo o vector  $v = (2, 2)$ .

(3 v) 3) Seja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^2$  tal que  $\nabla f(1, 0) = (6, 3)$  e seja  $g(x, y) = f(x - y, x^2 - 4y)$ . Justifique que  $g$  é uma função diferenciável e calcule  $\nabla g(2, 1)$ .

(3 v) 4) Determine e classifique os pontos críticos de

$$f(x, y, z) = -y^3 - 2x^2 + 6y^2 - 2z^2 + z + 1.$$

5) Considere o conjunto

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 2, x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

(3 v) a) Escreva uma expressão para o volume de  $A$  através de integrais da forma  $\int(\int(\int dx)dy)dz$ .

(3 v) b) Seja  $f(x, y, z) = z$ . Calcule o integral de  $f$  em  $A$ .

(3 v) 6) Seja  $D \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto aberto tal que para  $a, x \in D$  o segmento de recta que une  $a$  e  $x$  está contido em  $D$ . Seja  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^1$ . Mostre que

$$f(x) = f(a) + \int_0^1 \nabla f(a + t(x - a)) \cdot (x - a) dt.$$