Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 1 - 12 de Abril de 2014 - Versão A
Duração: 11:30-13:00
Todos os cursos excepto LMAC, MEBiom, MEFT

Apresente e justifique todos os cálculos

(1 v) 1) Diga, justificadamente, se existe o $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \cos\left(\frac{y^2}{x^2+y^2}\right)$.

2) Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy^2}{\sqrt{4x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0), \\ k, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(2 v) (a) Determine o valor de k de modo a que f seja contínua no seu domínio.

(2 v) (b) Assumindo que $k = 0$, calcule a derivada de f no ponto $(0,0)$ segundo o vector $v = (1,2)$.

(3 v) 3) Seja $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 tal que $\nabla g(1,3,3) = (-2,2,1)$ e seja $f(t) = g(t^2, 4t - t^2, 3t)$. Justifique que f é uma função diferenciável e calcule $f'(1)$.

(3 v) 4) Determine e classifique os pontos críticos de

$$f(x,y,z) = x^3 - 6x^2 + y^2 + 3z^2 + z + 2.$$

5) Considere o conjunto

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 2 - \sqrt{x^2+y^2},\ x \geq 0, y \geq 0\}.$$

(3 v) a) Escreva uma expressão para o volume de A através de integrais da forma $\int(\int(\int\ dx)dy)dz$.

(3 v) b) Seja $f(x,y,z) = z$. Calcule o integral de f em A.

(3 v) 6) Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto tal que para $a, x \in D$ o segmento de recta que une a e x está contido em D. Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1. Mostre que

$$f(x) = f(a) + \int_0^1 \nabla f(a + t(x-a)) \cdot (x-a)\, dt.$$