Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 1 (versão 1) - 12 de Novembro de 2016 - 8h
Duração: 90 minutos
Todos os cursos do IST

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere a função dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^3}{x^2+y^2+x^4}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(2 val.) (a) Calcule, ou mostre que não existe, o limite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

(2 val.) (b) Calcule, se existir, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

2. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 e seja $\phi(x,y) = f(x^3+y^2, x+y)$.

(2 val.) (a) Sabendo que $\nabla f(1,1) = (2,3)$, determine $\nabla\phi(1,0)$.

(1 val.) (b) Determine $\dfrac{\partial^2\phi}{\partial x^2}(x,y)$ em termos das derivadas parciais de f.

(3 val.) 3. Determine e classifique os pontos críticos da função definida por $g(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + xy + y^3$.

4. Considere o conjunto

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y<1\,;\, y^2+z<1\,;\, x>0\,;\, y>0\,;\, z>0\}.$$

(2 val.) (a) Escreva uma expressão para o volume de A usando integrais triplos iterados da forma $\int(\int(\int dy)dz)dx$.

(2 val.) (b) Escreva uma expressão para o volume de A usando um só integral triplo iterado.

(3 val.) 5. Usando coordenadas cilíndricas calcule o volume do conjunto

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2<1\,;\, z+\sqrt{x^2+y^2}<2\,;\, y>0\}.$$

(3 val.) 6. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ contínua. Mostre que se existir um aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ limitado por uma curva fechada C e tal que C é conjunto de nível de f, então f tem pelo menos um extremo local.

Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 1 (versão 2) - 12 de Novembro de 2016 - 8h
Duração: 90 minutos
Todos os cursos do IST

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere a função dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(2 val.) (a) Calcule, ou mostre que não existe, o limite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

(2 val.) (b) Calcule, ou mostre que não existe, a derivada $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$.

2. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 e seja $\phi(x) = f(x^2, x^3)$.

(2 val.) (a) Sabendo que $\nabla f(1,1) = (2,3)$, determine $\phi'(1)$.

(1 val.) (b) Calcule $\phi''(x)$ em termos das derivadas parciais de f.

(3 val.) 3. Determine e classifique os pontos críticos da função definida por $g(x,y) = x^3 + 2xy + \frac{1}{2}y^2$.

4. Considere o conjunto

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y < 1\,;\; y+z^2 < 1\,;\; x > 0\,;\; y > 0\,;\, z > 0\}.$$

(2 val.) (a) Escreva uma expressão para o volume de A usando integrais triplos iterados da forma $\int(\int(\int dy)dx)dz$.

(2 val.) (b) Escreva uma expressão para o volume de A usando um só integral triplo iterado.

(3 val.) 5. Usando coordenadas cilíndricas calcule o volume do conjunto

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 < 1\,;\; \sqrt{x^2+y^2} < z < 2\,;\; x > 0\,;\; y > 0\}.$$

(3 val.) 6. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ contínua. Mostre que se existir um aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ limitado por uma curva fechada C e tal que C é conjunto de nível de f, então f tem pelo menos um extremo local.

Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 1 (versão 1) - 12 de Novembro de 2016 - 10h
Duração: 90 minutos
Todos os cursos do IST

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere a função dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+2xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(2 val.) (a) Calcule, ou mostre que não existe, o limite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

(2 val.) (b) Calcule, se existir, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

2. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 e seja $\phi(x,y) = f(x^2+y, y^2+x)$.

(2 val.) (a) Sabendo que $\nabla f(2,2) = (1,5)$, calcule $\nabla \phi(1,1)$.

(1 val.) (b) Determine $\dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$ em termos das derivadas parciais de f.

(3 val.) 3. Determine e classifique os pontos críticos da função definida por $g(x,y) = x^2 + xy^2 + y^2$.

4. Considere o conjunto

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z < 2\,;\, y > x\,;\, x > 0\,;\, y > 0\,;\, z > 0\}.$$

(2 val.) (a) Escreva uma expressão para o volume de A usando integrais triplos iterados da forma $\int(\int(\int dz)dx)dy$.

(2 val.) (b) Escreva uma expressão para o volume de A usando um só integral triplo iterado.

(3 val.) 5. Usando coordenadas cilíndricas calcule o volume do conjunto

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2} < z < 2 - x^2 - y^2\,;\, y > 0\}.$$

(3 val.) 6. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ contínua. Mostre que se f não tem extremos locais então não existe nenhuma curva fechada $C \subset \mathbb{R}^2$, que limite um conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^2$, e tal que C seja conjunto de nível de f.

Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 1 (versão 2) - 12 de Novembro de 2016 - 10h
Duração: 90 minutos
Todos os cursos do IST

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere a função dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^4}{x^4 + x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(2 val.) (a) Determine, ou mostre que não existe, o limite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

(2 val.) (b) Calcule, se existir, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

2. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 e seja $\phi(x) = f(x^2, x^2)$.

(2 val.) (a) Sabendo que $\nabla f(1,1) = (1,4)$, calcule $\phi'(1)$.

(1 val.) (b) Determine $\phi''(x)$ em termos das derivadas parciais de f.

(3 val.) 3. Determine e classifique os pontos críticos da função definida por $g(x,y) = x^2 + y^2 + x^2 y$.

4. Considere o conjunto

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z < 2\,;\ y < x\,;\ x > 0\,;\ y > 0\,; z > 0\}.$$

(2 val.) (a) Escreva uma expressão para o volume de A usando integrais triplos iterados da forma $\int(\int(\int dz)dy)dx$.

(2 val.) (b) Escreva uma expressão para o volume de A usando um só integral triplo iterado.

(3 val.) 5. Usando coordenadas cilíndricas calcule o volume do conjunto

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < z < 2 - \sqrt{x^2 + y^2}\,;\ x > 0\,;\ y > 0\}.$$

(3 val.) 6. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ contínua. Mostre que se f não tem extremos locais então não existe nenhuma curva fechada $C \subset \mathbb{R}^2$, que limite um conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^2$, e tal que C seja conjunto de nível de f.