Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 1 (versão 2) - 11 de Abril de 2015 - 09h00
Duração: 90 minutos
Todos os cursos excepto LMAC, MEFT e MEBiom

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere a função dada por

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{2y^3 - xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(2 val.) (a) Mostre que g é contínua na origem.

(2 val.) (b) Calcule, se existir, a derivada de g no ponto $(0,0)$ segundo o vector $(-1,1)$.

2. Seja $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $h(1,2) = (1,2)$ e h é diferenciável no ponto $(1,2)$ com matriz Jacobiana

$$Dh(1,2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Seja ainda f dada por $f(t) = (\cos(\pi t/2) + 1, 2t)$, para qualquer $t \in \mathbb{R}$.

(2 val.) (a) Calcule $D(h \circ f)(1)$.

(1 val.) (b) Calcule $D(h \circ h)(1,2)$.

(3 val.) 3. Determine e classifique os pontos críticos da função definida por $f(x,y) = x^4 + y^2 - 2xy$.

4. Considere o conjunto definido por

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1\ ;\ 1 - y < 2z < 4\}.$$

Escreva uma expressão para o volume de A em termos de integrais iterados da forma:

(2 val.) a) $\int(\int(\int dz)dx)dy$;

(2 val.) b) $\int(\int(\int dx)dy)dz$.

(3 val.) 5. Usando uma mudança de coordenadas apropriada calcule a massa do sólido

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x < \sqrt{y^2+z^2}\ ;\ x < \sqrt{2 - y^2 - z^2}\},$$

sabendo que a função densidade de massa é dada por $\alpha(x,y,z) = 4x$.

(3 val.) 6. Prove o *Teorema de Pappus*: Se R é uma região limitada no 1º quadrante do plano xy com área $A > 0$, então o volume do sólido que se obtém por rotação de R em torno do eixo $0y$ é dado por

$$V = 2\pi A \bar{x},$$

onde $\bar{x}$ é a coordenada x do centróide da região R.