

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 1 (versão 2) - 11 de Abril de 2015 - 11h30

Duração: 90 minutos

Todos os cursos excepto LMAC, MEFT e MEBiom

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere a função dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^3 - xy}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(2 val.) (a) Mostre que o limite $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ não existe.

(2 val.) (b) Calcule, se existir, a derivada de f no ponto $(0, 0)$ segundo o vector $(-1, 1)$.

2. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(2, 3) = (-1, 1)$ e f é diferenciável no ponto $(2, 3)$ com matriz Jacobiana

$$Df(2, 3) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Seja ainda $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x, y) = x + \sin(3(y - 1))$.

(2 val.) (a) Calcule $D(g \circ f)(2, 3)$.

(1 val.) (b) Sendo $h(x, y) = f(g(x, y), y + 2)$ calcule $Dh(2, 1)$.

(3 val.) 3. Determine e classifique os pontos críticos da função definida por $g(x, y) = 2xy - y^2 - x^2y$.

4. Considere o conjunto definido por

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x < 1 ; 0 < y < 1 ; x^2 + y^2 < z < 2\}.$$

Escreva uma expressão para o volume de V em termos de integrais iterados da forma:

(2 val.) a) $\int (\int (\int dz) dx) dy$;

(2 val.) b) $\int (\int (\int dx) dy) dz$.

(3 val.) 5. Usando uma mudança de coordenadas apropriada calcule o volume do sólido

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 < 1 + x^2 ; 0 < x < 1 ; y > 0\}.$$

(3 val.) 6. Considere o conjunto $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$. Seja $g : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x, y) = f(\sqrt{x^2 + y^2})$ onde $f : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1 tal que $\int_1^2 f(r)r dr = \beta$. Mostre que

$$\int_B h = 2\pi (4f(2) - f(1) - 2\beta),$$

onde $h : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ é definida por $h(x, y) = \nabla g(x, y) \cdot (x, y)$.