Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 1 - 10 de Novembro de 2012 - 16h30 - Versão 1
Duração: 90 minutos

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{-y^3}{3x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(2 val.) (a) Mostre que f é contínua em $(0,0)$.

(1 val.) (b) Determine as derivadas parciais de f em $(0,0)$.

(1 val.) (c) Mostre que f não é diferenciável em $(0,0)$.

(3 val.) 2. Seja $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 tal que $Df(0,0,\pi) = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ e seja $h(x,y,z) = f(z^2\log(1+x^2), \cos(3y), x^2+yz)$. Calcule $\dfrac{\partial h}{\partial y}(0,\frac{\pi}{6},6)$.

(3 val.) 3. Determine e classifique os pontos de estacionaridade da função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = x^2 - \frac{1}{4}(y^2-4)^2$.

(2 val.) 4. Considere o conjunto

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -x \leq y \leq 1,\ x \leq 0\}.$$

Sendo $f(x,y) = e^{y^2}$, calcule $\int_S f$.

5. Considere o conjunto

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq x^2+y^2,\ x^2+y^2 \leq 1,\ x \geq 0, y \geq 0\}.$$

(2.5 val.) (a) Escreva uma expressão para o volume de A na forma $\int(\int(\int dx)dy)dz$.

(2.5 val.) (b) Calcule o volume de A.

(3 val.) 6. Seja $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^3. Mostre, detalhada e justificadamente, que

$$\frac{\partial^3 g}{\partial z \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 g}{\partial x \partial z \partial y}.$$