Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 1 - 6 de Novembro de 2010 - 13h - Versão 2
Duração: 90 minutos

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \operatorname{sen}\left(\frac{y^3}{x^2+y^2}\right) & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(3 val.) (a) Diga, justificadamente, se f é contínua na origem.

(1 val.) (b) Calcule $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

(3 val.) 2. Seja $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ a função $h(x,y,z) = e^{x^2+yz}$ e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ uma função de classe C^1 tal que $g(1,1) = (1,1,0)$ e

$$Dg(1,1) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Calcule a derivada de $h \circ g$ no ponto $(1,1)$ segundo o vector $v = (1,2)$.

3. Considere o conjunto

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = e^{x+z} + \operatorname{sen} z\}.$$

(2 val.) (a) Mostre que S é uma variedade e indique a sua dimensão.

(2 val.) (b) Determine o espaço tangente a S no ponto $(0,1,0)$.

(3 val.) (c) Mostre que S é o gráfico de uma função $z = g(x,y)$ numa vizinhança do ponto $(0,1,0)$ e calcule $\frac{\partial g}{\partial x}(0,1)$.

(3 val.) 4. Mostre que o perímetro do maior rectângulo que pode ser inscrito na elipse

$$\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{d^2} = 1, \quad c, d > 0$$

é dado por $4\sqrt{c^2+d^2}$.

(3 val.) 5. Seja u uma função de classe C^2 definida no disco unitário $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$ tal que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} > 0.$$

Mostre que u tem um máximo em $\partial D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 1\}$.