Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II
LEMAT
1^{O} TESTE – 04 DE NOVEMBRO DE 2008

Apresente e justifique todos os cálculos
duração: 90 minutos

(3 val.) (1) Diga, justificando, se a seguinte função $h\ :\ \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}\ \to \mathbb{R}$,

$$h(x,y) = \frac{xy}{4x^2+3y^2}$$

tem limite no ponto $(0,0)$.

(3 val.) (2) Seja $\phi(x,y) = f(y, x^2+y^2)$, onde f é uma função de classe C^2. Determine $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$ em termos das derivadas parciais de f.

(3) Considere o conjunto

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ 2x^2+3y^2+3z^2 = 8\right\}.$$

(2 val.) a) Mostre que S é uma variedade e determine a sua dimensão.

(2 val.) b) Determine se o vector $(0,1,-1)$ é ou não tangente a S no ponto $(1,1,1)$.

(3 val.) c) Determine se numa vizinhança do ponto $(1,1,1)$ é possível descrever S como gráfico de uma função da forma $x = f(y,z)$. Em caso afirmativo determine $\nabla f(1,1)$.

(4 val.) (4) Determine os valores máximo e mínimo do campo escalar dado por

$$f(x,y) = x^4+y^4+2x^2y^2-2x^2+2y^2$$

no conjunto

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 2\}.$$

(3 val.) (5) Encontre uma função de classe C^1, $f\ :\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, tal que o ponto $Q = (1,1,1)$ seja um máximo da restrição de f à variedade-2,

$$M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ :\ x^2+2y^2+3z^2 = 6\right\}$$

e tal que $\nabla f(Q) \neq 0$.