Departamento de Matemática do IST, Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática III
$2^{\underline{o}}$ Semestre 2004/05
LEEC, LEGI

Prof. Responsável: João Pimentel Nunes

Programa:
O programa corresponde a 13 semanas de aulas teóricas:
I. Integrais Múltiplos
II. Curvas e Integrais de Linha
III. Teoremas da Função Inversa e Implícita
IV. Variedades Diferenciais
V. Integrais Sobre Variedades
VI. Teoremas da Divergência e de Stokes e Aplicações
VII. Complementos de Cálculo Integral

Distribuição Aproximada da Matéria por Aulas Téoricas:
I. Integrais Múltiplos

1. Breve apresentação e descrição do programa. Funcionamento da cadeira. Introdução aos integrais múltiplos. Intervalos em $\mathbb{R}^n$. Funções em escada e integrais de funções em escada. Recordar integral de Riemann de funções limitadas em intervalos compactos de $\mathbb{R}$ (Teorema Fundamental do Cálculo).
2. Definição e propriedades de conjuntos de contéudo nulo e de medida nula. Exemplos.
3. Funções limite superior. Integrais de funções limite superior. Exemplos, incluindo funções contínuas em intervalos compactos de $\mathbb{R}^n$.
4. Funções Integráveis. Propriedades. Exemplos.
5. Teorema de Fubini. Exemplos. Aplicação ao cálculo de volumes, centróides, massas (cargas eléctricas), centros de massa, momentos de inércia.
6. Mudanças de variáveis de integração e aplicações. Coordenadas polares, cilíndricas e esféricas.
7. Mudanças de variáveis de integração e aplicações - conclusão.

II. Curvas e Integrais de Linha

8. Curvas e caminhos. Exemplos. Propriedades. Comprimento. Integrais de linha de campos escalares. Aplicações ao cálculo de massas de filamentos, etc.
9. Integrais de linha de campos vectoriais. Trabalho de uma força.
10. Conjuntos conexos por arcos. Teorema fundamental do cálculo para integrais de linha. Conservação de energia mecânica. Campos gradiantes e campos potenciais.
11. Condições necessárias e suficientes para que um campo vectorial seja gradiante. Cálculo de funções potenciais.
12. Homotopia. Invariância de integrais de campos fechados sobre caminhos homotópicos. Teorema de Green.

III. Teoremas da Função Inversa e da Função Implícita

13. Teorema da função inversa e aplicações.
14. Conclusão do estudo do Teorema da função inversa.
15. Teorema da função implícita e aplicações.
16. Conclusão do estudo do Teorema da função implícita.

IV. Variedades Diferenciais

17. Motivação da noção de variedade diferencial. Definição. Variedades definidas parametricamente. Exemplos.

18. Variedades como gráficos de funções e como conjuntos de nível. Variedades definidas por equações Cartesianas. Espaço tangente e espaço normal. Exemplos.

19. Conclusão da matéria anterior. Extremos condicionados. Método dos multiplicadores de Lagrange.

V. Integrais sobre Variedades

20. Comprimentos, áreas, volumes.

21. Integrais em variedades. Relevo para o caso de superfícies em $\mathbb{R}^3$.

22. Domínios regulares, normal exterior. Teorema da divergência.

23. Conclusão da matéria anterior. Exemplos. Tornar a mencionar brevemente o teorema de Green.

24. Interpretação geométrica e física da divergência. Fluxos de campos vectoriais através de superfícies orientáveis em $\mathbb{R}^3$. Lei de Gauss.

25. Teorema de Stokes em $\mathbb{R}^3$. Interpretação geométrica e física do rotacional. Exemplos.

26. Conclusão da matéria anterior.

27. Propriedades da divergência, rotacional e gradiante. Equações de Maxwell de electromagnetismo. Potenciais vectoriais para campos solenóidais em conjuntos em estrela em $\mathbb{R}^3$. Exemplo de campo solenoidal sem potencial vectorial: campo gravitacional de uma massa pontual. Teorema de Helmoltz.

VI. Complementos de Cálculo Integral

28. Recordar brevemente noção de função limite superior e de função integrável. Problema do cálculo de integrais de funções ilimitadas e/ou de integrais em regiões ilimitadas. Teorema da convergência monótona de Levi. Aplicações incluindo funções potência.

29. Teorema da convergência dominada de Lebesgue. Aplicações incluindo a função Gama.

30. Conclusão da matéria anterior.

31. Continuidade de funções definidas por integrais. Derivação de funções definidas por integrais. Regra de Leinbniz. Exemplos.

32. Funções mensuráveis e conjuntos mensuráveis. Aplicação ao estudo de integrabilidade de funções.

33. Teorema de Tonelli. Exemplos de aplicação.