Análise Matemática III
1º semestre de 1999/2000

Exercício tipo 2

1. Indique justificadamente se os seguintes conjuntos têm ou não medida nula.

a) $S = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x = \frac{1}{n}\}$

b) $S = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$

c) $S = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1\}$

d) $S = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : y = e^{x+z}\}$

Solução:

a) Como uma união numerável de conjuntos de medida nula tem medida nula, para provar que S tem medida nula é suficiente ver que cada um dos conjuntos

$$S_n = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x = \frac{1}{n}\}$$

tem medida nula.

Para fazer isto pode-se, por exemplo, usar a definição de conjunto de medida nula. Dado $\epsilon > 0$ considere-se a família de intervalos em $\mathbb{R}^3$

$$I_{n,j} = \left[\frac{1}{n} - \frac{\epsilon}{j^2 2^{j+3}}, \frac{1}{n} + \frac{\epsilon}{j^2 2^{j+3}}\right] \times [-j,j] \times [-j,j]$$

Então

$$S_n \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_{n,j}$$

e

$$\sum_{j=1}^{\infty} v(I_{n,j}) = \sum_{j=1}^{\infty} 2\frac{\epsilon}{j^2 2^{j+3}}(2j)(2j) = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{\epsilon}{2^j} = \epsilon$$

o que conclui a prova.

b) O conjunto contém o intervalo de $\mathbb{R}^3$

$$\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right] \times \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right] \times \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$$

(visto que $(\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2 = \frac{3}{4} \leq 1$). Este intervalo não tem medida nula e portanto qualquer conjunto que o contenha também não tem (um subconjunto de um conjunto com medida nula tem medida nula). Logo S não tem medida nula.

c) S é a união dos gráficos das funções contínuas $\sqrt{1-x^2-y^2}$ e $-\sqrt{1-x^2-y^2}$ sobre o conjunto compacto de $\mathbb{R}^2$

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

portanto tem conteúdo nulo (e logo medida nula).

d) O conjunto

$$S_n = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = e^{x+z}, -n \leq x \leq n, -n \leq z \leq n\}$$

é o gráfico da função contínua

$$f(x,z) = e^{x+z}$$

sobre o intervalo compacto

$$[-n,n] \times [-n,n] \subset \mathbb{R}^2$$

onde usamos x e z como coordenadas para $\mathbb{R}^2$. Concluímos que S_n tem conteúdo nulo e portanto medida nula.

Como

$$S = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n$$

S é uma união numerável de conjuntos de medida nula. Logo tem medida nula.

2. Indique justificadamente se a sucessão de funções

$$f_n(x,y) = (x^2+y^2)^n$$

converge quase em toda a parte em $S = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 1\}$ para a função constante igual a 0.

Solução: Recorda-se que para $r \in \mathbb{R}$ se tem

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} 0 & \text{se } |r| < 1 \\ 1 & \text{se } r = 1 \\ +\infty & \text{se } r > 1 \\ \text{não existe} & \text{se } r \leq -1 \end{cases}$$

Portanto,

$$\lim_{n\to\infty} (x^2+y^2)^n = \begin{cases} 0 & \text{se } x^2+y^2 < 1 \\ 1 & \text{se } x^2+y^2 = 1 \end{cases}$$

donde concluímos que o subconjunto de S onde $f_n(x,y)$ não converge para 0 é a circunferência de raio 1 definida pela equação

$$x^2 + y^2 = 1$$

Este conjunto tem medida nula porque é a união dos gráficos em $\mathbb{R}^2$ das funções contínuas $\sqrt{1-x^2}$ e $-\sqrt{1-x^2}$ sobre o intervalo compacto $[-1,1]$ de $\mathbb{R}$.

Concluímos que $f_n(x,y) \to 0$ q.t.p. em S.