Análise Matemática III
1º semestre de 1999/2000

Exercício tipo 1

Esboce detalhadamente o conjunto S descrito por

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, 2x^2 + 2y^2 \leq z \leq 1 + x^2 + y^2, 2y + z \leq 2\}$$

Solução: As superfícies

$$z = 1 + x^2 + y^2 \tag{1}$$

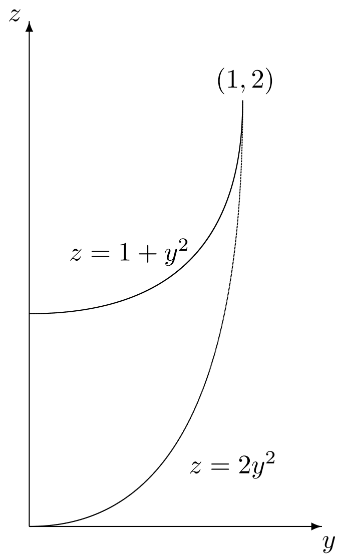
e

$$z = 2x^2 + 2y^2 \tag{2}$$

são superfícies de revolução em torno do eixo Oz (z é função apenas da distância $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ de (x,y) a $(0,0)$). Assim, para esboçar o conjunto definido pelas condições

$$x \geq 0, y \geq 0, 2x^2 + 2y^2 \leq z \leq 1 + x^2 + y^2 \tag{3}$$

basta considerar a intersecção das superfícies com o plano coordenado Oyz:



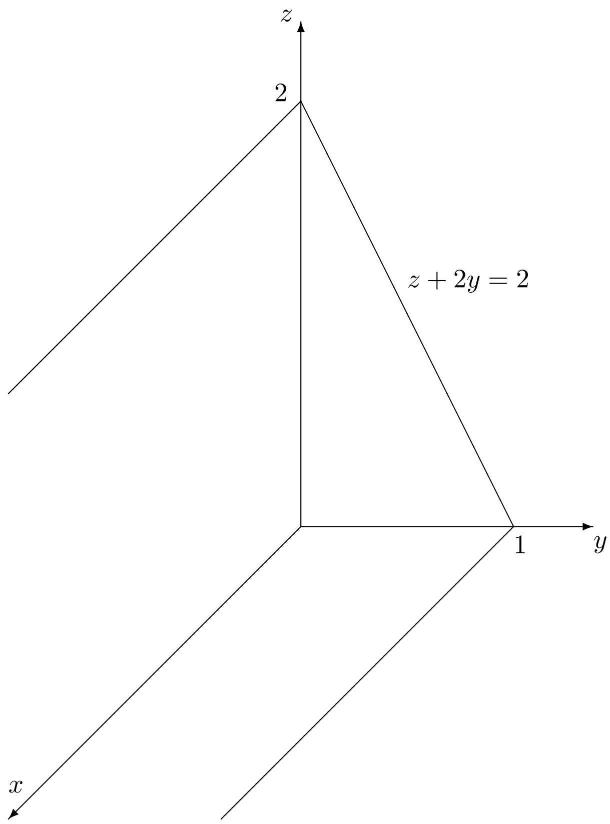
A região descrita em (3) é a região que se obtém rodando a figura acima em torno do eixo Oz sobre o primeiro quadrante do plano Oxy. Isto é, é a região entre os gráficos dos parabolóides de revolução (2) e (1) sobre o quarto de círculo

$$x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0$$

O conjunto S é a porção desta região que se encontra sob o plano

$$2y + z = 2 \tag{4}$$

cuja intersecção com o primeiro octante é descrita na figura seguinte



Assim, S é limitado inferiormente pelo parabolóide (2) e superiormente pelo parabolóide (1) ou pelo plano (4).

Resta agora determinar a região do plano Oxy sobre a qual S é limitada superiormente pelo plano e a região sobre a qual S é limitada superiormente por (1). Para isto é necessário calcular a intersecção do plano com os parabolóides.

A intersecção do plano com (2) é dada por

$$\begin{cases} z = 2x^2 + 2y^2 \\ z = 2 - 2y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + y = 1 \\ z = 2 - 2y \end{cases}$$

Portanto a projecção da intersecção no plano Oxy é o arco de circunferência

$$x^2 + (y + \frac{1}{2})^2 = \frac{5}{4}, x \geq 0, y \geq 0$$

A região limitada por este arco e os eixos coordenados Ox e Oy é a região onde

$$2x^2 + 2y^2 \leq 2 - 2y$$

e portanto a projecção de S no plano Oxy. A intersecção do plano com (1) é dada por

$$\begin{cases} z = 1 + x^2 + y^2 \\ z = 2 - 2y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2y = 1 \\ z = 2 - 2y \end{cases}$$

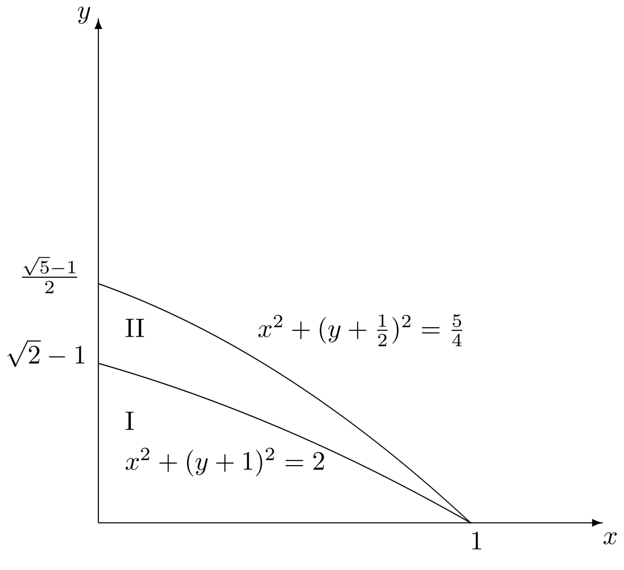
A projecção desta intersecção no plano Oxy é o arco circunferência

$$x^2 + (y + 1)^2 = 2, x \geq 0, y \geq 0$$

A região limitada por este arco e os eixos coordenados Ox e Oy é a região onde

$$1 + x^2 + y^2 \leq 2 - 2y$$

e portanto a região sobre a qual o limite superior de S é formado pelo parabolóide (1). A figura seguinte descreve a projecção de S no plano Oxy.



Sobre a região I, S é formada pelos pontos entre os dois parabolóides e sobre a região II é formada pelos pontos entre o parabolóide (2) e o plano (4).

Com esta informação podemos agora esboçar o conjunto S: