Análise Matemática III
1º semestre de 1999/2000

Exercício resolvido 9

Considere a variedade

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{x^2 + y^2};\ 1 < z < 2;\ 0 < y < x\}$$

Descreva M parametricamente e determine a respectiva dimensão.

Solução: Trata-se de um pedaço do tronco de cone compreendido entre os planos $z = 1$, $z = 2$, $y = 0$ e $y = x$ e que se encontra representado na Fig.1. Para maior clareza, encontram-se também representadas as circunferências que resultam da intersecção do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ com os planos $z = 1$ e $z = 2$, os segmentos de recta resultantes da intersecção dos planos $y = 0$ e $y = x$ com os planos $z = 0$, $z = 1$, $z = 2$ e com o cone. Em coordenadas cilíndricas (ρ, θ, z)

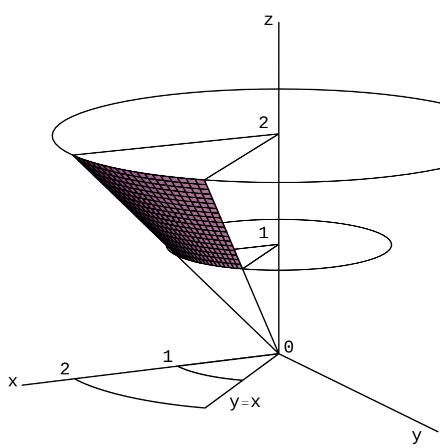

Fig. 1: $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{x^2 + y^2};\ 1 < z < 2;\ 0 < y < x\}$

podemos descrever o conjunto M da forma seguinte:

$$z = \rho;\ 1 < z < 2;\ 0 < \theta < \frac{\pi}{4}$$

que permite encontrar a parametrização $g :]0, \frac{\pi}{4}[\times]1, 2[\to \mathbb{R}^3$ definida por

$$g(\theta, z) = (z\cos\theta, z\operatorname{sen}\theta, z)$$

A função g é de classe C^1, injectiva e a respectiva derivada

$$Dg(\theta, z) = \begin{bmatrix} -z\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \\ z\cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

tem característica igual a 2 (as colunas são linearmente independentes). Para além disso, $M = g(]0, \frac{\pi}{4}[\times]1, 2[)$, ou seja, g é uma bijecção entre M e o intervalo aberto de $\mathbb{R}^2$ dado por $]0, \frac{\pi}{4}[\times]1, 2[$. Portanto, g é uma parametrização de M e $dim(M) = 2$.