# Análise Matemática III
# 2º semestre de 1999/2000

## Exercício resolvido 9

Considere o sistema de equações

$$\left\{\begin{array}{rcl} x^2-y^2-u^3+v^2+4 & = & 0 \\ 2xy+y^2-2u^2+3v^4+8 & = & 0 \end{array}\right.$$

a) Mostre que este sistema de equações define duas funções $u(x,y)$ e $v(x,y)$ numa vizinhança do ponto $(x,y)=(2,-1)$ e tais que $u(2,-1)=2$ e $v(2,-1)=1$.

b) Calcule a derivada $\frac{\partial u}{\partial x}(2,-1)$

**Solução:**

a) Seja $F:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^2$ a função definida por

$$F(x,y,u,v)=(x^2-y^2-u^3+v^2+4\,,\,2xy+y^2-2u^2+3v^4+8)$$

Trata-se de uma função de classe $C^1$ e o Teorema da Função Implícita garante a existência das funções $u(x,y)$ e $v(x,y)$ desde que se tenha $F(2,-1,2,1)=(0,0)$ e

$$\det\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(u,v)}=\det\begin{bmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v}\\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v}\end{bmatrix}\neq 0$$

no ponto $(x,y,u,v)=(2,-1,2,1)$.

De facto, temos

$$\det\begin{bmatrix}-3u^2 & 2v\\ -4u & 12v^3\end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix}-12 & 2\\ -8 & 12\end{bmatrix}=-128$$

Portanto, existe uma vizinhança $W$ do ponto $(x,y)=(2,-1)$ e duas funções $u,v:W\to\mathbb{R}$ de classe $C^1$ tais que $u(2,-1)=2$ e $v(2,-1)=1$. Para além disso temos $F(x,y,u(x,y),v(x,y))=(0,0)$ em alguma vizinhança do ponto $(2,-1,2,1)$.

b) Da equação $F(x,y,u(x,y),v(x,y))=(0,0)$, derivando em $x$, obtemos

$$\left\{\begin{array}{rcl} \frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_1}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F_1}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} & = & 0\\ \frac{\partial F_2}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} & = & 0\end{array}\right.$$

Calculando estas derivadas no ponto $(x,y)=(2,-1)$, obtemos o seguinte sistema de equações

$$\begin{bmatrix}-12 & 2\\ -8 & 12\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\partial u}{\partial x}\\ \frac{\partial v}{\partial x}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4\\ 2\end{bmatrix}$$

donde se conclui que

$$\frac{\partial u}{\partial x}(2,-1)=\frac{13}{32}$$