# Análise Matemática III
# 2º semestre de 1999/2000

## Exercício resolvido 8

Indique se o campo vectorial

$$F(x,y) = \left( -\frac{y}{(x^2+y^2)} + \frac{y-1}{(x-1)^2+(y-1)^2}\,,\,\frac{x}{(x^2+y^2)} - \frac{x-1}{(x-1)^2+(y-1)^2} \right)$$

é gradiante no seu domínio de definição. Calcule

$$\int_C F$$

onde $C$ é a circunferência de raio 3, centrada no ponto $(1/2, 1/2)$ e percorrida no sentido anti-horário.

**Solução:** O domínio de definição do campo $F$ é o conjunto $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0),(1,1)\}$. É fácil de verificar que $\partial_x F_y = \partial_y F_x$, pelo que $F$ é um campo fechado. No entanto, $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0),(1,1)\}$ não é um conjunto em estrela (nem é simplesmente conexo). Consequentemente, não podemos decidir imediatamente se $F$ é ou não um gradiante no seu domínio.

Observamos que $F = F_1 + F_2$, com $F_1(x,y) = \left(-\frac{y}{(x^2+y^2)}\,,\,\frac{x}{(x^2+y^2)}\right)$ e $F_2(x,y) = \left(\frac{y-1}{(x-1)^2+(y-1)^2}\,,\,-\frac{x-1}{(x-1)^2+(y-1)^2}\right)$. Facilmente se verifica que $F_1$ e $F_2$ são campos fechados.

Seja $C_1$ a circunferência de raio $1/10$ (esta é só uma escolha possível) centrada na origem, percorrida no sentido anti-horário. Seja $C_2$ a circunferência de raio $1/10$ centrada no ponto $(1,1)$, percorrida no sentido anti-horário. Temos que

$$\int_{C_1} F_1 = 2\pi, \text{ e que } \int_{C_2} F_1 = 0.$$

O primeiro resultado segue de um cálculo directo imediato. O segundo segue pelo teorema de Green, porque $F_1$ é fechado e não tem singularidades no interior do disco cuja fronteira é $C_2$.

Do mesmo modo, temos que

$$\int_{C_1} F_2 = 0, \text{ e que } \int_{C_2} F_2 = -2\pi.$$

A primeira igualdade segue pelo teorema de Green, porque $F_2$ é fechado e não tem singularidades no interior do disco cuja fronteira é $C_1$. A segunda igualdade segue por um cálculo directo imediato. (Note-se que a menos de uma troca de sinal, $F_2$ é o mesmo que $F_1$ se colocarmos a origem no ponto (1,1).)

Podemos então aplicar o teorema de Green na região interior a $C$ e exterior a $C_1$ e $C_2$. Como $F$ é fechado o integral duplo de $\partial_x F_y - \partial_y F_x$ é zero, e o teorema de Green diz que

$$\int_C F = \int_{C_1} F + \int_{C_2} F = 2\pi - 2\pi = 0.$$

Recorde-se que $F$ é gradiante no seu domínio se e só se o trabalho for zero ao longo de todos os caminhos fechados. Ora, temos por exemplo que $\int_{C_1} F = \int_{C_1} F_1 = 2\pi$, logo $F$ não é gradiante no seu domínio.

No entanto, $F$ já seria um gradiante, por exemplo, no conjunto exterior a $C$.