

**Análise Matemática III**  
**1º Semestre de 2000/2001**

**Exercício resolvido 8**

Calcule

$$\oint_{\gamma} Pdx + Qdy$$

onde

$$(P, Q) = \left( -y^3 + (1 + 2x^2) ye^{x^2} \cos(y^2), x^3 + xe^{x^2} (\cos(y^2) - 2y^2 \sin(y^2)) \right)$$

e  $\gamma$  é a circunferência de raio 1 percorrida uma vez no sentido directo.

**Solução:** Pelo teorema de Green,

$$\oint_{\gamma} Pdx + Qdy = \iint_S \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

onde  $S$  é o círculo de raio 1 centrado na origem. Como

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 3x^2 + (1 + 2x^2) e^{x^2} (\cos(y^2) - 2y^2 \sin(y^2));$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -3y^2 + (1 + 2x^2) e^{x^2} (\cos(y^2) - 2y^2 \sin(y^2)),$$

concluimos que

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} Pdx + Qdy &= \iint_S (3x^2 + 3y^2) dxdy \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (3r^2) r d\theta dr \\ &= 2\pi \left[ \frac{3r^4}{4} \right]_0^1 \\ &= \frac{3\pi}{2}. \end{aligned}$$

Note-se que o cálculo deste integral de linha pela definição seria bastante mais complicado.