Análise Matemática III
$1^{\underline{o}}$ semestre de 1999/2000

Exercício resolvido 3

i) Prove que o sistema

$$\begin{cases} u &= xy \\ v &= \frac{y}{x} \end{cases}$$

é invertível em alguma vizinhança do ponto $(x,y)=(1,2)$. Calcule as derivadas $\frac{\partial x}{\partial u}(2,2)$, $\frac{\partial y}{\partial v}(2,2)$.

ii) Mostre que o conjunto definido pela equação $x^5+yx+\operatorname{sen}(xy)=1$ pode ser representado, em alguma vizinhança do ponto $(x,y)=(1,0)$, pelo gráfico de uma função $y=f(x)$ de classe C^1. Calcule a derivada $f'(0)$.

Solução:

i) Considere-se a função $g(x,y)=(xy,\frac{y}{x})$ definida para $x\neq 0$. Trata-se de uma uma função de classe C^1 e tem-se:

$$Dg(x,y)=\begin{bmatrix} y & x \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{bmatrix}$$

e, portanto,

$$\det Dg(1,2)=\det\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}=4\neq 0$$

O teorema da função inversa garante que em alguma vizinhança do ponto $(1,2)$ a função g é invertível e de classe C^1. Para além disso, sendo $g(1,2)=(2,2)$, temos,

$$Dg^{-1}(2,2)=[Dg(1,2)]^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

ou seja

$$\frac{\partial x}{\partial u}(2,2)=\frac{1}{4},\ \frac{\partial y}{\partial v}(2,2)=\frac{1}{2}$$

Note-se que g é injectiva em cada um dos quadrantes de $\mathbb{R}^2$. Por outro lado, $\det Dg(x,y)=\frac{2y}{x}$, e o teorema da função inversa não se aplica em torno de pontos com $y=0$. No entanto, sobre o eixo x a função g não é injectiva. Note que $g(x,0)=(0,0)$, $\forall x\neq 0$. Podemos concluir que o primeiro quadrante é o maior subconjunto aberto de $\mathbb{R}^2$ que contém o ponto $(1,2)$ e em que g é invertível e com inversa de classe C^1. Assim, a restrição de g ao primeiro quadrante é uma transformação de coordenadas.

ii) Consideremos a função $F(x,y) = x^5 + yx + \operatorname{sen}(xy) - 1$ definida em $\mathbb{R}^2$. Trata-se de uma função de classe C^1 e tal que $F(1,0) = 0$. Além disso, temos,

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = x + x\cos(xy)$$

e, portanto,

$$\frac{\partial F}{\partial y}(1,0) = 2 \neq 0$$

O teorema da função implícita garante que em alguma vizinhança do ponto $(1,0)$ se verifica a equivalência

$$F(x,y) = 0 \Longleftrightarrow y = f(x)$$

em que f é uma função de classe C^1 e tal que $f(1) = 0$. Portanto, em alguma vizinhança do ponto $(1,0)$, o conjunto em que $F(x,y) = 0$ é o gráfico da função f. Por outro lado, temos,

$$f'(1) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(1,0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(1,0)} = -\frac{5}{2}$$

Note-se que $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 5x^4 + y + y\operatorname{sen}(xy)$.