Análise Matemática III
1º semestre de 2000/2001

Exercício resolvido 7

Considere o campo vectorial $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ definido por $f(x,y,z) = (yze^{xyz}, xze^{xyz}, xye^{xyz})$.

a) Sabendo que f define uma força conservativa, encontre um potencial ϕ para f.

b) Calcule o trabalho de f ao longo da espiral parametrizada pelo caminho $g(t) = (5\cos(t), 5\,\mathrm{sen}(t), t^2)$ com $t \in [0, \pi/4]$.

Solução:

a) O potencial ϕ satisfaz a condição $\nabla\phi = f$, ou seja vamos ter $\frac{\partial\phi}{\partial x} = yze^{xyz}$, $\frac{\partial\phi}{\partial y} = xze^{xyz}$ e $\frac{\partial\phi}{\partial z} = xye^{xyz}$. Integrando a primeira equação, obtem-se $\phi(x,y,z) = e^{xyz} + g(y,z)$ onde $g(y,z)$ é arbitrária. Substituindo na segunda e terceira equações obtemos $\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial z} = 0$, pelo que g é uma constante que podemos tomar como sendo zero. (Recorde-se que o potencial ϕ está definido a menos de uma constante.)

Concluímos que podemos tomar $\phi(x,y,z) = e^{xyz}$.

Nota: Em geral é preciso cuidado quando se tenta calcular o potencial deste modo. Quando não sabemos à partida se o campo vectorial f é conservativo, é muito importante verificar se o potencial ϕ obtido está bem definido e é de classe C^1 na região em que está definido o problema. Só nesse caso temos a garantia que f é conservativa.

Também é possível encontrar ϕ recorrendo ao teorema fundamental do cálculo para integrais de linha, que diz que sendo f conservativa e escolhendo-se um ponto base p_0, se tem

$$\phi(p) = \int_{p_0}^{p} f,$$

onde o integral é ao longo de um caminho diferenciável qualquer que ligue p_0 a p. No nosso caso podemos escolher $p_0 = 0$ e o caminho como sendo o segmento de recta que une p à origem, parametrizado por $h(t) = (tx, ty, tz)$, com $t \in [0,1]$. Obtemos então,

$$\phi(x,y,z) = \int_0^1 f(h(t)) \cdot h'(t)dt = \int_0^1 (t^2yze^{t^3xyz}, t^2xze^{t^3xyz}, xyt^2e^{t^3xyz}) \cdot (x,y,z)dt =$$

$$= \int_0^1 3xyzt^2e^{t^3xyz}dt = e^{xyz} - 1,$$

que a menos de uma constante é o resultado obtido acima.

b) Para calcular o trabalho de f ao longo da espiral vamos utilizar o teorema fundamental do cálculo,

$$W = \int f dg = \int \nabla\phi = \phi(g(\pi/4)) - \phi(g(0)) = \phi(5\sqrt{2}/2, 5\sqrt{2}/2, \pi^2/16) - \phi(5,0,0) = e^{25\pi^2/32} - 1.$$

Note-se que seria muito mais difícil fazer este cálculo directamente utilizando a definição de trabalho.