Análise Matemática III
2º semestre de 1999/2000

Exercício resolvido 7

Considere o caminho $g : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ definido por $g(t) = (e^t \cos(2\pi t), e^t \operatorname{sen}(2\pi t))$.

a) Calcule o comprimento $L(g)$ do caminho g.

b) Calcule a coordenada $\bar{x}$ do centróide da curva representada por g.

c) Calcule o trabalho da força $f(x,y) = (x,y)$ ao longo de g.

Solução:

a) Para calcular o comprimento precisamos de calcular a derivada de g:

$$g'(t) = (e^t \cos(2\pi t) - 2\pi e^t \operatorname{sen}(2\pi t), e^t \operatorname{sen}(2\pi t) + 2\pi e^t \cos(2\pi t))$$

e a respectiva norma

$$||g'(t)|| = \sqrt{1+4\pi^2}\, e^t$$

Portanto,

$$L(g) = \int_0^1 ||g'(t)||dt = \int_0^1 \sqrt{1+4\pi^2} e^t dt = \sqrt{1+4\pi^2}\,(e-1)$$

b) Por definição de centróide temos:

$$\bar{x} = \frac{1}{L(g)} \int_0^1 x(g(t))||g'(t)||dt = \frac{1}{(e-1)} \int_0^1 e^{2t} \cos(2\pi t) dt$$

integrando por partes duas vezes obtemos

$$\bar{x} = \frac{e^2-1}{2(e-1)(1+\pi^2)}$$

c) O trabalho é dado por

$$W = \int_0^1 f(g(t)) \cdot g'(t) dt = \int_0^1 (e^t \cos(2\pi t), e^t \operatorname{sen}(2\pi t)) \cdot g'(t) dt = \int_0^1 e^{2t} dt = \frac{e^2-1}{2}$$