Análise Matemática III
1º semestre de 1999/2000

Exercício resolvido 7

1 Indique se o campo vectorial

$$F(x,y,z) = \left(-\frac{2x}{(x^2-y^2)^2}\,,\ \frac{2y}{(x^2-y^2)^2}\,,\ z^2\right)$$

é gradiante no seu domínio de definição. Em caso afirmativo, dê a expressão geral do potencial. Em qualquer caso, calcule

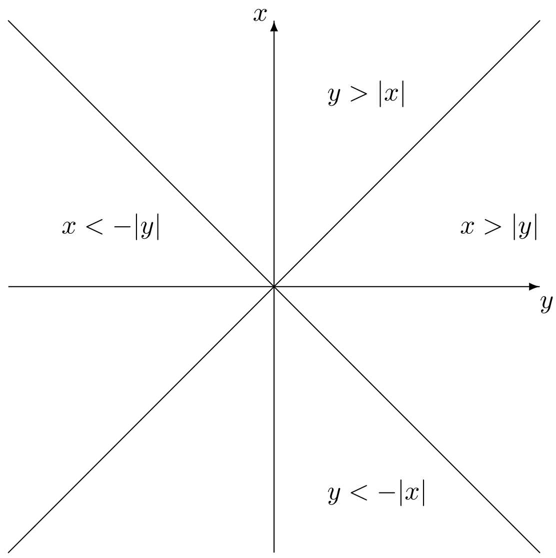
$$\int_C F$$

onde C é a curva parametrizada por $g(t) = (e^t, \operatorname{sen} t, t)$ com $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.

Solução: O domínio de definição do campo F é o conjunto

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \neq \pm y\}$$

que é a união de 4 conjuntos em estrela, limitados pelos planos $x = y$ e $x = -y$.



Como F é gradiante no domínio se e só se fôr gradiante em cada uma destas regiões conexas por arcos, é suficiente ver se F é fechado:

$$\begin{array}{ccccc}
\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{2x}{(x^2-y^2)^2}\right) & = & -\frac{8xy}{(x^2-y^2)^3} & = & \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2y}{(x^2-y^2)^2}\right) \\
\frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{2x}{(x^2-y^2)^2}\right) & = & 0 & = & \frac{\partial}{\partial x}\left(z^2\right) \\
\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{2y}{(x^2-y^2)^2}\right) & = & 0 & = & \frac{\partial}{\partial y}\left(z^2\right)
\end{array}$$

Portanto F é um campo gradiante. Para determinar um potencial $V(x, y, z)$ para F temos as equações:

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial x} &= -\frac{2x}{(x^2-y^2)^2} \\ \frac{\partial V}{\partial y} &= \frac{2y}{(x^2-y^2)^2} \\ \frac{\partial V}{\partial z} &= z^2 \end{cases}$$

Da primeira obtemos,

$$V(x, y, z) = \frac{1}{x^2 - y^2} + C(y, z)$$

Substituindo V na segunda,

$$\frac{\partial C}{\partial y}(y, z) = 0 \Leftrightarrow C(y, z) = D(z)$$

e finalmente da terceira equação obtemos

$$D'(z) = z^2 \Leftrightarrow D(z) = \frac{z^3}{3} + E$$

Portanto o potencial tem a forma

$$V(x, y, z) = \frac{1}{x^2 - y^2} + \frac{z^3}{3} + E$$

onde E é uma constante.

No entanto, uma vez que a região onde o campo está definido não é um conjunto conexo por arcos, a constante pode variar de componente para componente. Assim, a expressão geral para o potencial é dada por

$$V(x, y, z) = \begin{cases} \frac{1}{x^2-y^2} + \frac{z^3}{3} + E_1 & \text{se } x > |y| \\ \frac{1}{x^2-y^2} + \frac{z^3}{3} + E_2 & \text{se } y > |x| \\ \frac{1}{x^2-y^2} + \frac{z^3}{3} + E_3 & \text{se } x < -|y| \\ \frac{1}{x^2-y^2} + \frac{z^3}{3} + E_4 & \text{se } y < -|x| \end{cases}$$

com $E_i \in \mathbb{R}$.

Finalmente, pelo teorema fundamental do cálculo (que podemos aplicar porque o caminho g está inteiramente contido na região em que $x > |y|$), uma vez que $g(0) = (1, 0, 0)$ e $g(\frac{\pi}{2}) = (e^{\frac{\pi}{2}}, 0, \frac{\pi}{2})$, temos

$$\begin{aligned} \int_C F &= V(e^{\frac{\pi}{2}}, 0, \frac{\pi}{2}) - V(1, 0, 0) \\ &= e^{-\pi} + \frac{\pi^3}{24} - 1 \end{aligned}$$

2 Considere o campo definido em $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ por

$$F(x,y) = \left(\frac{y}{x^2+4y^2}, -\frac{x}{x^2+4y^2}\right)$$

Calcule o integral de linha de F ao longo da circunferência de raio 1 centrada na origem e percorrida no sentido directo.

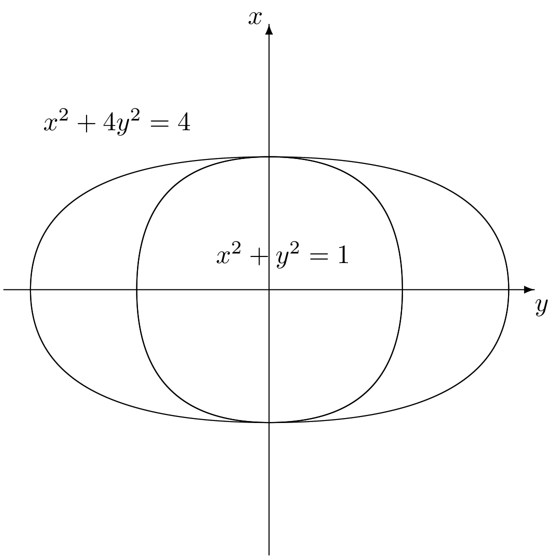
Solução: Se tentarmos calcular o integral de linha pela definição obtemos um integral que não é fácil de calcular. Em vez disso podemos tentar utilizar o teorema de Green. O campo F é fechado:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+4y^2}\right) = \frac{x^2-4y^2}{(x^2+4y^2)^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{x^2+4y^2}\right)$$

portanto, para calcular o integral de F podemos substituir o caminho

$$g(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t),\ 0 \leq t \leq 2\pi$$

por um caminho homotópico que torne o integral mais simples. A expressão



do campo sugere que consideremos curvas onde x^2+4y^2 seja constante, isto é elipses. Consideremos por exemplo, o caminho

$$h(t) = (2\cos t, \operatorname{sen} t),\ 0 \leq t \leq 2\pi$$

que percorre a elipse $x^2+4y^2=4$ uma vez no sentido directo. Este caminho é homotópico a g em $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ portanto

$$\oint F.dg = \oint F.dh$$

A expressão para o segundo integral é

$$\begin{aligned}
\oint F.dh &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\operatorname{sen} t}{4\cos^2 t + 4\operatorname{sen}^2 t}, -\frac{2\cos t}{4\cos^2 t + 4\operatorname{sen}^2 t} \right).(-2\operatorname{sen} t, \cos t)dt \\
&= \int_0^{2\pi} -\frac{1}{2}dt \\
&= -\pi
\end{aligned}$$