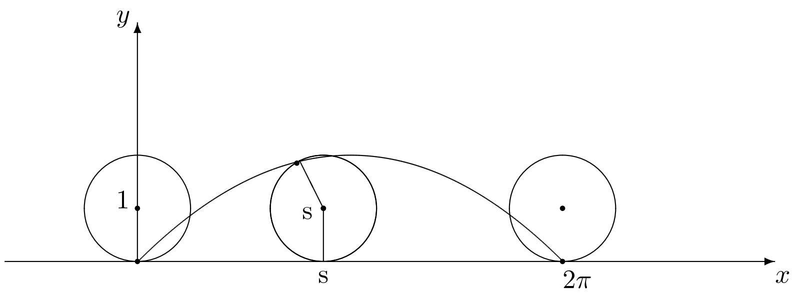
Análise Matemática III
$1^{\underline{o}}$ semestre de 1999/2000

Exercício resolvido 6

Um aro circular de raio 1 rola sem deslizar ao longo de uma linha recta. Qual é o comprimento da trajectória descrita por um ponto do aro entre um contacto com o solo e a próxima vez que se encontra á mesma altura que o centro?
A curva descrita por um ponto do aro chama-se uma **ciclóide**

Solução: Podemos colocar o aro no plano xOy a rolar ao longo do eixo Ox de tal forma que, no início do movimento, o centro se encontra no ponto $(0,1)$ e o ponto do aro em questão se encontra na origem.

O facto de o aro rolar sem deslizar significa que quando o centro se desloca uma distância s ao longo do eixo Ox, o ponto no aro descreve, em relação ao centro do aro, um arco de circunferência de comprimento s. Em particular, num quarto de volta do aro, o centro deslocar-se-á um comprimento total de $\frac{\pi}{2}$.



O movimento do ponto do aro pode-se decompôr em dois: o movimento do centro do aro e o movimento do ponto em relação ao centro.

Se usarmos a distância percorrida pelo aro como parâmetro, a trajectória do centro é descrita pelo caminho $g_1 : [0, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definido por

$$g_1(s) = (s, 1)$$

Por outro lado, a trajectória do ponto no aro *em relação ao centro* é descrita pelo caminho $g_2 : [0, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definido por

$$\begin{aligned} g_2(s) &= (\cos(-\frac{\pi}{2} - s), \operatorname{sen}(-\frac{\pi}{2} - s)) \\ &= (-\operatorname{sen} s, -\cos s) \end{aligned}$$

já que o vector que une o centro ao ponto do aro começa por fazer um ângulo de $-\frac{\pi}{2}$ com o eixo Ox e roda no sentido dos ponteiros do relógio.

Portanto, a trajectória descrita pelo ponto no aro é dada pela soma destes dois caminhos: $g : [0, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definido por

$$\begin{aligned} g(s) &= g_1(s) + g_2(s) \\ &= (s - \operatorname{sen} s, 1 - \cos s) \end{aligned}$$

O comprimento deste caminho é dado pela expressão (onde $C = g([0, \frac{\pi}{2}])$)

$$\int_C 1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ||g'(s)||ds$$

Como

$$g'(s) = (1 - \cos s, \operatorname{sen} s)$$

temos

$$\begin{aligned} ||g'(s)|| &= \sqrt{1 - 2\cos s + \cos^2 s + \operatorname{sen}^2 s} \\ &= \sqrt{2(1 - \cos s)} \end{aligned}$$

e portanto

$$\begin{aligned} \int_C 1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2(1 - \cos s)}ds \\ &= \int_0^1 \sqrt{2(1-u)}\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \\ &= \sqrt{2}\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1+u}} \\ &= 2\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1) \end{aligned}$$

onde na passagem da primeira para a segunda linha se fez a mudança de variável $u = \cos s$.