

Análise Matemática III 1º semestre de 2000/2001

Exercício Resolvido 6

Um fio C , com densidade de massa $\rho(x, y, z) = |x(y+1)|$, tem a configuração da intersecção das superfícies

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{x^2 + y^2}\} \text{ e } P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y + \sqrt{2}z = 1\}.$$

Calcule a massa de C .

Resolução: A massa do fio é dada pelo integral de linha

$$m = \int_C \rho.$$

Para calcular este integral de linha precisamos de determinar uma parametrização para a curva C . Começemos por determinar a equação da projecção, C' , de C no plano xOy :

$$\begin{cases} z = \sqrt{x^2 + y^2} \\ z = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - y) \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = \frac{1}{2} - y + \frac{y^2}{2}$$
$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{(y+1)^2}{2} = 1.$$

Portanto a projecção C' é uma elipse centrada no ponto $(0, -1, 0)$ com eixo maior de comprimento $\sqrt{2}$ e eixo menor de comprimento 1. Uma parametrização para C pode ser definida por

$$g(t) = (\cos(t), \sqrt{2} \sin(t) - 1, \sqrt{2} - \sin(t)), \quad t \in [0, 2\pi],$$

onde se usou o facto de que, quando t percorre o intervalo $[0, 2\pi]$, a função $(\cos(t), \sqrt{2} \sin(t) - 1, 0)$ percorre a projecção C' e que o único ponto de C por cima de $(\cos(t), \sqrt{2} \sin(t) - 1, 0)$ tem coordenada z dada por

$$z = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - y(g(t))) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - (\sqrt{2} \sin(t) - 1)) = \sqrt{2} - \sin(t).$$

Temos

$$g'(t) = (-\sin(t), \sqrt{2} \cos(t), -\cos(t))$$
$$\|g'(t)\| = \sqrt{\sin^2(t) + 2 \cos^2(t) + \cos^2(t)} = \sqrt{1 + 2 \cos^2(t)}$$
$$\rho(g(t)) = |\cos(t)(\sqrt{2} \sin(t) - 1 + 1)| = \frac{1}{\sqrt{2}} |\sin(2t)|,$$

logo

$$m = \int_0^{2\pi} \rho(g(t)) \|g'(t)\| dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} |\sin(2t)| \sqrt{1 + 2 \cos^2(t)} dt$$
$$= \frac{4}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2t) \sqrt{1 + 2 \cos^2(t)} dt = \frac{4}{3\sqrt{2}} \left[-(1 + 2 \cos^2(t))^{\frac{3}{2}} \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= \frac{4}{3\sqrt{2}} (3^{\frac{3}{2}} - 1).$$