Análise Matemática III
2º semestre de 1999/2000

Exercício Resolvido 6

Considere o subconjunto de $\mathbb{R}^3$ definido por

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x < 1\,;\, x^2 - 1 < y < x^2\,;\, x^3 < z < x^3 + 2\}$$

e a função $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$g(x, y, z) = (x, y - x^2, z - x^3)$$

i) Mostre que a função g é uma transformação de coordenadas.

ii) Use a transformação de coordenadas g para calcular o integral $\int_S \frac{z-x^3}{1+x^2} dxdydz$.

Resolução

i) – A função g é claramente de classe C^1.

– A função g é injectiva. De facto, se $g(x_1, y_1, z_1) = g(x_2, y_2, z_2)$ então

$$(x_1, y_1 - x_1^2, z_1 - x_1^3) = (x_2, y_2 - x_2^2, z_2 - x_2^3)$$

e, portanto,

$$x_1 = x_2\,;\, y_1 = y_2\,;\, z_1 = z_2$$

– A derivada de g é dada pela matriz

$$Dg(x, y, z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2x & 1 & 0 \\ -3x^2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e, portanto

$$\det Dg(x, y, z) = 1 \neq 0$$

Assim, g é uma transformação de coordenadas em $\mathbb{R}^3$.

ii) Da descrição do conjunto S temos

$$0 < x < 1\,;\, -1 < y - x^2 < 0\,;\, 0 < z - x^3 < 2$$

e fazendo $(u, v, w) = g(x, y, z)$, obtemos

$$0 < u < 1\,;\, -1 < v < 0\,;\, 0 < w < 2$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\int_S \frac{z - x^3}{1 + x^2} dxdydz &= \int_0^1 \left(\int_{-1}^0 \left(\int_0^2 \frac{w}{1 + u^2} dw\right) dv\right) du \\
&= 2\int_0^1 \left(\int_{-1}^0 \frac{1}{1 + u^2} dv\right) du \\
&= 2\int_0^1 \frac{1}{1 + u^2} du \\
&= 2(\arctan 1 - \arctan 0) = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$