Análise Matemática III
1º semestre de 1999/2000

Exercício resolvido 5

Calcule as coordenadas do centróide do sólido

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 \leq x + \frac{1}{2}, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x \leq \frac{3}{2} - \sqrt{y^2 + z^2}\}$$

usando uma mudança de coordenadas apropriada.
Solução: O sólido tem simetria cilíndrica em torno do eixo Ox por isso, convém considerar coordenadas cilíndricas em torno deste eixo:

$$\begin{cases} x &= x \\ y &= r\cos\theta \\ z &= r\operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

Nestas coordenadas as equações que definem o sólido escrevem-se:

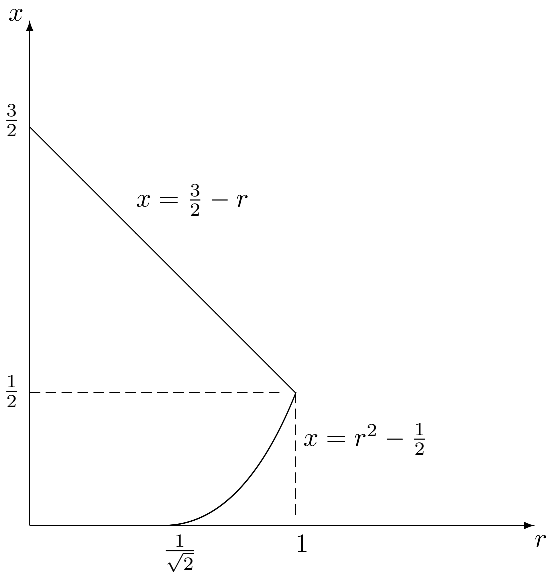
$$\begin{cases} r^2 \leq x + \frac{1}{2} \\ r\operatorname{sen}\theta \geq 0 \\ r\cos\theta \geq 0 \\ x \geq 0 \\ x \leq \frac{3}{2} - r \end{cases}$$

A segunda e terceira condições traduzem-se simplesmente em $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Portanto o sólido V trata-se da figura da página seguinte rodada em torno do eixo Ox sobre o primeiro quadrante do plano yOz.
Assim, temos a seguinte expressão para o volume de V:

$$\begin{aligned} \mathrm{Vol}(V) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{\sqrt{x+\frac{1}{2}}} r\,dr\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \int_0^{\frac{3}{2}-x} r\,dr\,dx \right) d\theta \\ &= \frac{\pi}{2} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x + \frac{1}{2}}{2} dx + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{(\frac{3}{2} - x)^2}{2} dx \right) \\ &= \frac{17\pi}{96} \end{aligned}$$

Por simetria, uma vez que o sólido que se obtém trocando as coordenadas y e z é igual, temos

$$\overline{y} = \overline{z}$$



$$
\begin{aligned}
\overline{y} &= \frac{\int_V y}{\text{Vol}(V)} \\
&= \frac{96}{17\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^{\sqrt{x+\frac{1}{2}}} r^2\cos\theta dr dx + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\int_0^{\frac{3}{2}-x} r^2\cos\theta dr dx\right) d\theta \\
&= \frac{96}{17\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta d\theta \left(\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(x+\frac{1}{2})^{\frac{3}{2}}}{3} dx + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{(\frac{3}{2}-x)^3}{3} dx\right) \\
&= \frac{96}{17\pi}\left(\frac{2}{5} - \frac{1}{10\sqrt{2}} + \frac{1}{4}\right) \\
&= \frac{8(13\sqrt{2}-2)}{85\pi\sqrt{2}} \\
\overline{x} &= \frac{\int_V x}{\text{Vol}(V)} \\
&= \frac{96}{17\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^{\sqrt{x+\frac{1}{2}}} rx dr dx + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\int_0^{\frac{3}{2}-x} xr dr dx\right) d\theta \\
&= \frac{96}{17\pi}\frac{\pi}{2}\left(\int_0^{\frac{1}{2}} x\frac{x+\frac{1}{2}}{2} dx + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} x\frac{(\frac{3}{2}-x)^2}{2} dx\right) \\
&= \frac{24}{17}\left(\frac{1}{24} + \frac{1}{16} + \frac{9}{4} - \frac{13}{4} + \frac{5}{4}\right) \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$