Análise Matemática III
2º semestre de 1999/2000

Exercício resolvido 5

Calcule o momento de inércia, relativamente ao eixo dos z do sólido

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}, 0 \leq x^2 + y^2 \leq 1\},$$

sabendo que a densidade de massa é dada por $\alpha(x, y, z) = y^2$, usando uma mudança de coordenadas apropriada.

Solução: O sólido tem simetria cilíndrica em torno do eixo dos z por isso, convém considerar coordenadas cilíndricas em torno deste eixo:

$$\begin{cases} x &= \rho\cos\theta \\ y &= \rho\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z &= z \end{cases}$$

O sólido é constitítuido por dois cones unidos, na origem, pelo vértice. O cone superior tem equação $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e o cone inferior tem equação $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$. A coordenada z varia portanto entre -1 e 1, já que temos a condição $0 \leq x^2 + y^2 \leq 1$.

Nestas coordenadas a equação que define o sólido escreve-se: $-\rho \leq z \leq \rho$, com $0 \leq \rho \leq 1$.

Para calcular o momento de inércia relativamente ao eixo dos z, precisamos primeiro de saber qual a distância $d(x, y, z)$ de um ponto (x, y, z) ao eixo dos z. Temos que $d(x, y, z) = ||(x, y, 0)|| = \sqrt{x^2 + y^2} = \rho$.

Assim, temos a seguinte expressão para o momento de inércia de V:

$$L_z(V) = \int_V \alpha(x, y, z) d^2(x, y, z) dxdydz = \int_0^{2\pi} (\int_0^1 (\int_{-\rho}^{\rho} \rho^2 (\sin\theta)^2 \rho^2 \rho dz) d\rho) d\theta.$$

O factor $\rho^2(\sin\theta)^2\rho^2$ corresponde a $\alpha(x, y, z)d^2(x, y, z)$. O factor adicional ρ é o Jacobiano das coordenadas cilíndricas. Escolhendo a ordem de integração $\int(\int(\int \rho dz)d\rho)d\theta$, obtemos os extremos de integração acima porque para um ρ fixo sabemos que $-\rho \leq z \leq \rho$.

Calculando o integral obtemos,

$$L_z(V) = (\int_0^{2\pi} (\sin\theta)^2 d\theta)(\int_0^1 2\rho^6 d\rho) = 2\pi/7.$$