Análise Matemática III
2º semestre de 1999/2000

Exercício Resolvido 4

Considere o subconjunto de $\mathbb{R}^3$ limitado pelos planos coordenados e pelos planos dados pelas equações $x+y+z=3$; $x+y-2z=0$ e $z=2$.

Escreva uma expressão para o volume de S em termos de integrais iterados da forma:

i) $\int \left(\int \left(\int dz\right) dx\right) dy$

ii) $\int \left(\int \left(\int dx\right) dy\right) dz$

Resolução

i) Para o integral iterado da forma $\int \left(\int \left(\int dz\right) dx\right) dy$, fixamos $y=b$, o que significa que devemos considerar o corte em S através do plano $y=b$.

Notemos que os planos $x+y+z=3$ e $x+y-2z=0$ se intersectam para $z=1$, ou seja, segundo a recta $x+y=2$. Portanto, $0<y<2$.

Notemos também que os planos $x+y+z=3$ e $z=2$ se intersectam segundo a recta $x+y=1$. Os planos $x+y-2z=0$ e $x=0$ intersectam-se segundo a recta dada por $x=0$; $y=2z$.

O corte em S segundo o plano $y=b$ é limitado pelas rectas

$$x=0\ ;\ z=2\ ;\ x+z=3-b\ ;\ x-2z=-b$$

tal como se representa na figura 1.

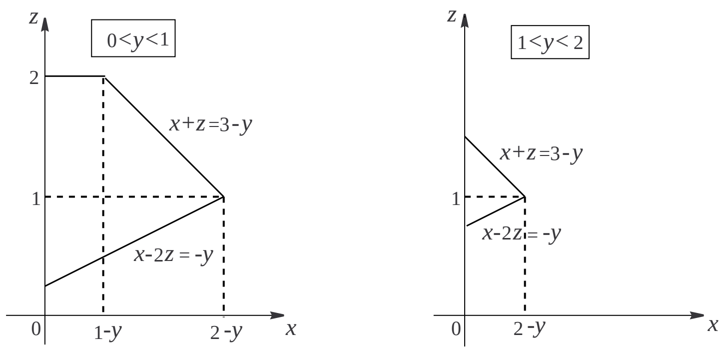

Figura 1: Corte segundo o plano $y=b$

Assim, para $0<b<1$, temos $2<x+z<3$. Dado que $0<z<2$, concluimos que para $0<x<1-b$ o corte segundo $y=b$ é limitado pelas rectas

$$x=0\ ;\ x=1-b\ ;\ x-2z=-b\ ;\ z=2$$

e para $1-b<x<2-b$, é limitado pelas rectas

$$x=1-b\ ;\ x-2z=-b\ ;\ x+z=3-b$$

Para $1 < b < 2$, o corte segundo $y = b$ é limitado pelas rectas

$$x = 0\ ;\ x - 2z = -b\ ;\ x + z = 3 - b$$

Portanto, o volume de S é dado por

$$\begin{aligned} Vol(S) &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-y} \left(\int_{\frac{x+y}{2}}^{2} dz \right) dx \right) dy + \\ &+ \int_0^1 \left(\int_{1-y}^{2-y} \left(\int_{\frac{x+y}{2}}^{3-x-y} dz \right) dx \right) dy + \\ &+ \int_1^2 \left(\int_0^{2-y} \left(\int_{\frac{x+y}{2}}^{3-x-y} dz \right) dx \right) dy \end{aligned}$$

ii) Dado que os planos $x + y + z = 3$ e $x + y - 2z = 0$ se intersectam para $z = 1$, devemos considerar dois casos, ou $0 < z < 1$ ou $1 < z < 2$ tal como se apresenta na figura 2.

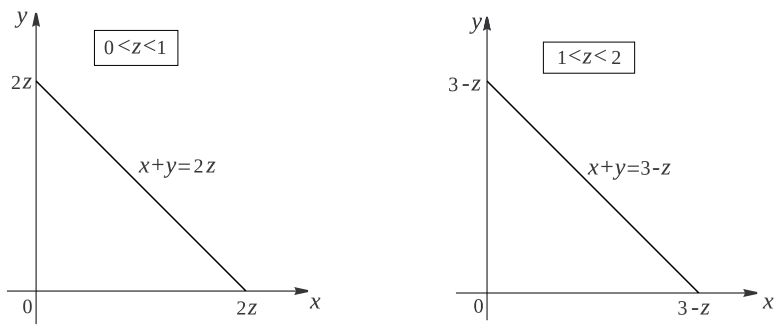

Figura 2: Corte segundo o plano $z = c$

Para $0 < z = c < 1$, o corte de S segundo o plano $z = c$ é limitado pelas rectas

$$x = 0\ ;\ y = 0\ ;\ x + y = 2c$$

Para $1 < z = c < 2$, o corte de S segundo o plano $z = c$ é limitado pelas rectas

$$x = 0\ ;\ y = 0\ ;\ x + y = 3 - c$$

Portanto, o volume de S é dado por

$$\begin{aligned} Vol(S) &= \int_0^1 \left(\int_0^{2z} \left(\int_0^{2z-y} dx \right) dy \right) dz + \\ &+ \int_1^2 \left(\int_0^{3-z} \left(\int_0^{3-y-z} dx \right) dy \right) dz \end{aligned}$$