Análise Matemática III
1º semestre de 1999/2000

Exercício resolvido 4

Escreva uma expressão para a massa do sólido

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \le x^2 + z^2 \le 4, 0 \le y \le (x^2 + z^2)^{\frac{1}{4}}, x \ge 0, z \ge 0\}$$

com densidade de massa $f(x, y, z) = e^y$, em termos de integrais iterados de cada uma das seguintes formas:

a) $\int \left(\int \left(\int dy\right) dx\right) dz$

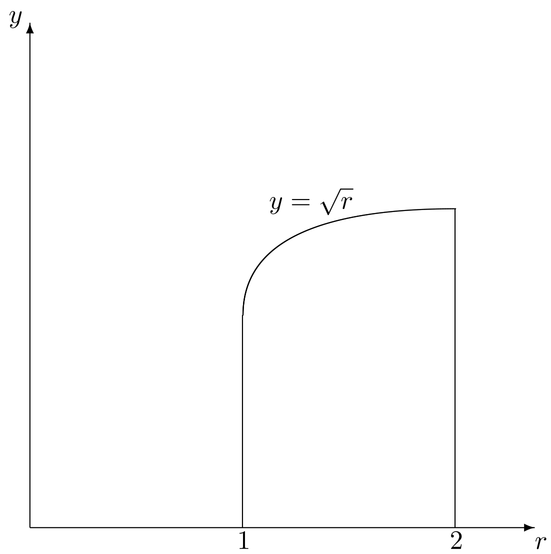
b) $\int \left(\int \left(\int dz\right) dx\right) dy$

c) $\int \left(\int \left(\int dx\right) dy\right) dz$

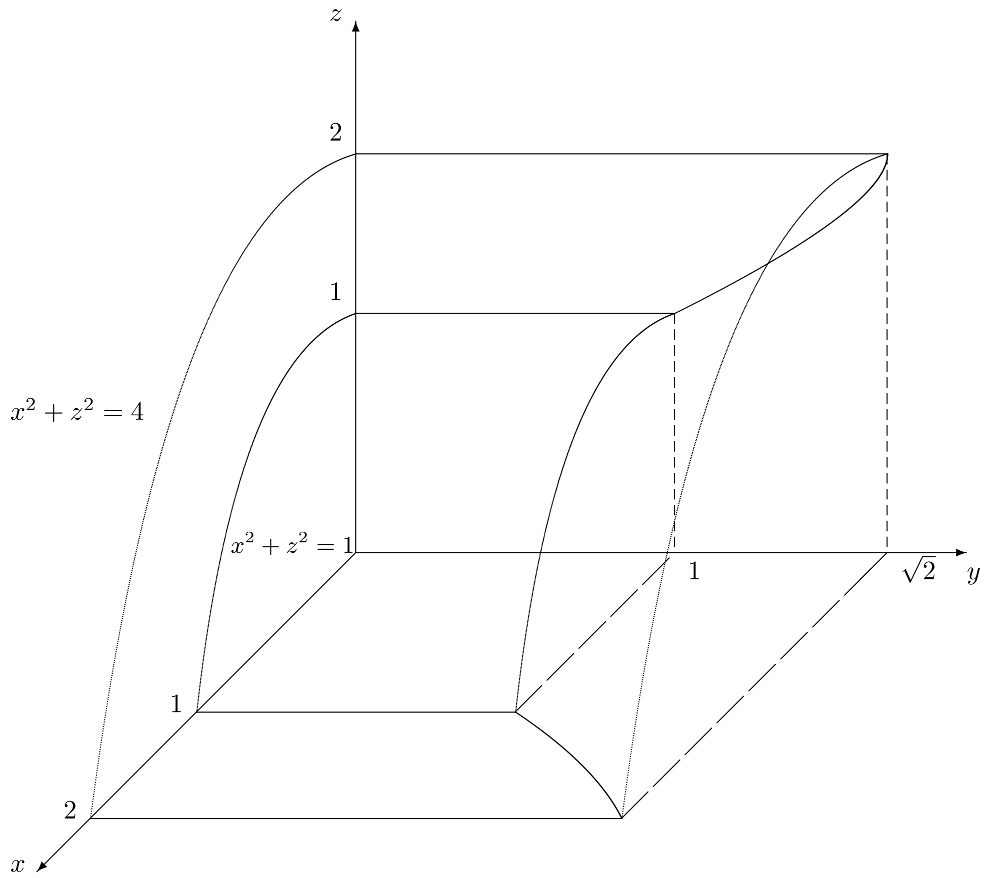
Solução: O sólido S tem simetria cilíndrica em torno do eixo Oy pelo que para ter uma ideia do seu aspecto basta esboçar a sua intersecção com um plano perpendicular ao plano Oxz contendo o eixo Oy.
Designando por $r = \sqrt{x^2 + z^2}$ a distância ao eixo Oy temos

$$\begin{cases} 1 \le x^2 + z^2 \le 4 \\ y \le (x^2 + z^2)^{\frac{1}{4}} \end{cases} \implies \begin{cases} 1 \le r \le 2 \\ y \le \sqrt{r} \end{cases}$$

Assim o sólido S consiste na figura



rodada em torno do eixo Oy sobre o quadrante do plano Oxz em que $x \ge 0$ e $z \ge 0$. Isto é, S tem o seguinte aspecto:



a) Claramente a projecção de S no plano Oxz é a região entre os quartos de círculo de raio 1 e 2, e para cada ponto $(x, 0, z)$ nesta região y varia entre 0 e $(x^2 + z^2)^{\frac{1}{4}}$ portanto temos que a massa M é dada por

$$M = \int_0^1 \int_{\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{4-z^2}} \left(\int_0^{(x^2+z^2)^{\frac{1}{4}}} e^y dy \right) dxdz + \int_1^2 \int_0^{\sqrt{4-z^2}} \left(\int_0^{(x^2+z^2)^{\frac{1}{4}}} e^y dy \right) dxdz$$

b) É claro da figura acima que y varia entre 0 e $\sqrt{2}$. Resta ver para cada destes valores de y qual é o domínio de variação de x e z, isto é achar os cortes de S por plano perpendiculares ao eixo Oy. Estes são dados pelas condições que definem o sólido S fazendo y constante:

$$\begin{aligned} z, x &\geq 0 \\ \sqrt{x^2 + z^2} &\geq y^2 \\ x^2 + z^2 &\leq 4 \\ x^2 + z^2 &\geq 1 \end{aligned}$$

Isto é, se $0 \leq y \leq 1$, x e z variam entre os quartos de círculo de raio 1 e 2 e para y entre 1 e $\sqrt{2}$, x e z variam entre os quartos de círculo de raio y^2 e 2. Portanto na ordem de integração pretendida temos:

$$
\begin{aligned}
M &= \int_0^1 \left(\int_0^1 \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} e^y dzdx + \int_1^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} e^y dzdx \right) dy \\
&+ \int_1^{\sqrt{2}} \left(\int_0^{y^2} \int_{\sqrt{y^4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} e^y dzdx + \int_{y^2}^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} e^y dzdx \right) dy
\end{aligned}
$$

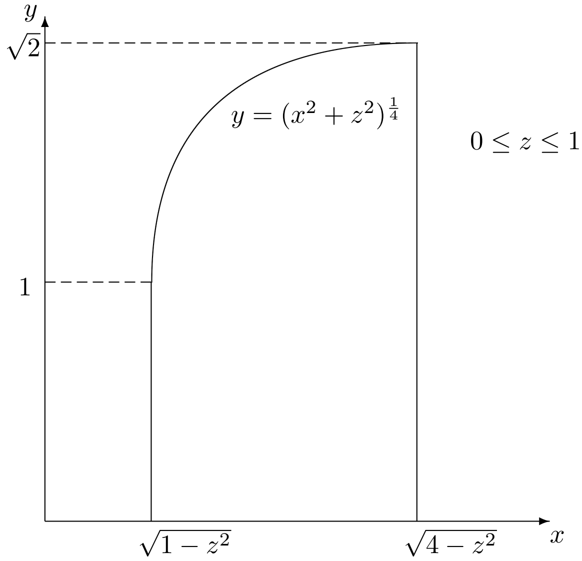
c) É claro da figura acima que z varia entre 0 e 2. Novamente, para escrever os limites de integração, é necessário determinar o domínio de variação de x e y para cada um destes valores de z. Isto é, os cortes de S por planos perpendiculares ao eixo Oz, que são dados pelas condições que definem o sólido S fazendo z constante:

$$
\begin{aligned}
y, x &\geq 0 \\
\sqrt{x^2+z^2} &\geq y^2 \\
1 &\leq x^2+z^2 \\
4 &\geq x^2+z^2
\end{aligned}
$$

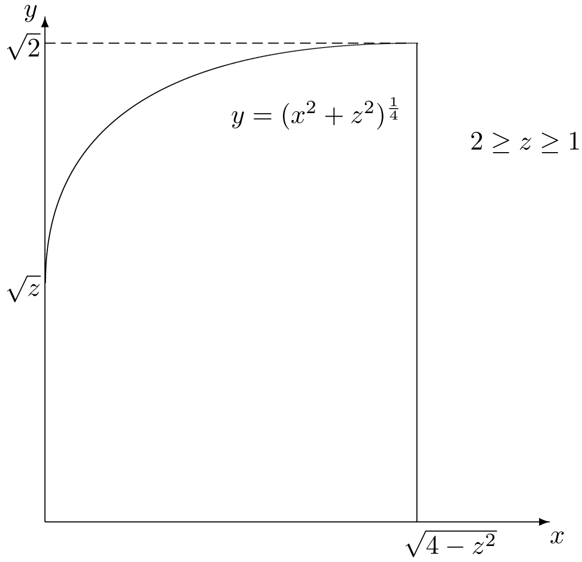
Resolvendo em ordem a x e z obtemos as condições:

$$
\begin{aligned}
y, x &\geq 0 \\
y &\leq (x^2+z^2)^{\frac{1}{4}} \\
x &\leq \sqrt{4-z^2} \\
x^2 &\geq 1-z^2
\end{aligned}
$$

Note-se que a última condição só tem qualquer efeito se $z \leq 1$. Assim, conforme $z \leq 1$ ou $z > 1$ o corte tem o seguinte aspecto:



$0 \leq z \leq 1$ fixo



$2 \geq z \geq 1$ fixo

Podemos agora escrever os limites de integração:

$$\begin{aligned} M &= \int_0^1 \left(\int_0^1 \int_{\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{4-z^2}} e^y dx dy + \int_1^{\sqrt{2}} \int_{\sqrt{y^4-z^2}}^{\sqrt{4-z^2}} e^y dx dy \right) dz \\ &+ \int_1^2 \left(\int_0^{\sqrt{z}} \int_0^{\sqrt{4-z^2}} e^y dx dy + \int_{\sqrt{z}}^{\sqrt{2}} \int_{\sqrt{y^4-z^2}}^{\sqrt{4-z^2}} e^y dx dy \right) dy \end{aligned}$$

Nota: Também seria fácil, neste caso, escrever os limites de integração pensando no domínio de variação de x para cada ponto da projecção do sólido no plano yOz.