Análise Matemática III
2º semestre de 1999/2000

Exercício resolvido 3

Mostre que a função $f : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

é uma função limite superior no intervalo $[1, +\infty[$.

Solução: Vamos construir uma sucessão crescente de funções em escada que converge para f em $[1, +\infty[$.

Considere-se a sucessão de funções em escada $s_k(x) : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por:

$$s_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+\frac{(n+1)^2}{2^{2k}}} & \text{se } \frac{n}{2^k} \leq x < \frac{n+1}{2^k} \text{ e } 2^k \leq n < k2^k - 1 \\ 0 & \text{se } x \geq k \end{cases}$$

Por palavras, s_k obtém-se subdividindo o intervalo $[1, k]$ em subintervalos de comprimento 2^{-k} e definindo s_k como sendo constante igual ao ínfimo de f no interior de cada um destes subintervalos e 0 para $x \geq k$ (recorde-se que uma função em escada tem de ser 0 fora de algum intervalo limitado).
Então

(i) $s_k(x) \leq s_{k+1}(x)$ porque os subintervalos onde a função $s_{k+1}(x)$ é constante estão contidos naqueles onde $s_k(x)$ é constante e ambas as funções são definidas como sendo o ínfimo de f nestes intervalos.

(ii) $s_k(x) \to f(x)$ para todo o x porque a função f é contínua, o comprimento dos intervalos onde s_k é constante e positiva está a tender para 0 com k e qualquer x pertence a estes intervalos para k suficientemente grande.

De facto podemos verificar que $|f(x) - s_k(x)| \leq |f'(x)|2^{-k}$ e, para cada x, quando $k \to \infty$ temos $s_k(x) \to f(x)$.

(iii) Como $s_k(x) \leq f(x)$ no intervalo $[1, k]$ temos

$$\int_{[1,+\infty[} s_k = \int_1^k s_k(x)dx \leq \int_1^k f(x)dx$$

onde o último integral existe e pode ser calculado da maneira usual uma vez que f é contínua no intervalo compacto $[1, k]$. Assim

$$\int_{[1,+\infty[} s_k \leq \int_1^k \frac{1}{1+x^2}dx = arctan(x)|_1^k = arctan(k) \leq \pi/2$$

e portanto a sucessão dos integrais das funções s_k é limitada.

Concluímos que f é uma função limite superior.