Análise Matemática III
1º semestre de 2000/2001

Exercício resolvido 2

1. Indique justificadamente se os seguintes conjuntos têm ou não medida nula.

(a) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^{2n+1} + y^{2n+1} = z^{2n+1},\ \text{para algum}\, n \in \mathbb{N}\}$

(b) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + x^2y^2 - x^2 = 0\}$

(c) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - \operatorname{sen}(yz) = 0\}$

(d) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^4 + y^4 \leq z \leq 2(x^4 + y^4)\}$

Solução:

(a) Observe-se que $S = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n$, onde

$$S_n = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^{2n+1} + y^{2n+1} = z^{2n+1}\}.$$

Como uma união numerável de conjuntos de medida nula tem medida nula, para provar que S tem medida nula basta mostrar que cada S_n tem medida nula.

Para ver que S_n tem medida nula, basta notar que S_n é o gráfico da função contínua $f_n(x, y) = (x^{2n+1} + y^{2n+1})^{\frac{1}{2n+1}}$ em $\mathbb{R}^2$. Conclui-se que S tem medida nula.

(b) Note-se que

$$x^4 + x^2y^2 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x^2 + y^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x^2 + y^2 = 1.$$

Portanto S é a união da recta $x = 0$ com a circunferência de raio 1 centrada na origem. A recta $x = 0$ tem medida nula pois é o gráfico da função $f(y) = 0$ em $\mathbb{R}$. A circunferência tem medida nula pois é a união dos gráficos das funções contínuas $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$ e $h(x) = -\sqrt{1 - x^2}$, no intervalo $[-1, 1]$. Conclui-se que S tem medida nula pois é a união de dois conjuntos com medida nula.

(c) S tem medida nula pois é o gráfico em $\mathbb{R}^2$ da função contínua $f(y, z) = \operatorname{sen}(yz)$.

(d) O conjunto S não tem medida nula: note-se que se um conjunto tem medida nula então todos os seus subconjuntos têm medida nula. Assim, para provar que S não tem medida nula, basta mostrar que contém um conjunto que não tem medida nula. Ora, S contém, por exemplo, o intervalo aberto (não vazio) $I =]2^{1/4}, 3^{1/4}[^2 \times]6, 7[$. Como os intervalos abertos (não vazios) de $\mathbb{R}^n$ não têm medida nula em $\mathbb{R}^n$, conclui-se que S não tem medida nula.

2. Indique justificadamente se a sucessão de funções

$$f_n(x, y) = x - (\operatorname{sen}(x^2 + y^2))^n$$

converge quase em toda a parte em $\mathbb{R}^2$ para a função $f(x, y) = x$.

Solução: Recorde-se que, para cada $r \in \mathbb{R}$, se tem

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} 0 & \text{se } |r| < 1 \\ 1 & \text{se } r = 1 \\ +\infty & \text{se } r > 1 \\ \text{não existe} & \text{se } r \leq -1 \end{cases}$$

Portanto,

$$\lim_{n\to\infty} x - (\operatorname{sen}(x^2 + y^2))^n = \begin{cases} x & \text{se } |\operatorname{sen}(x^2 + y^2)| < 1 \\ x - 1 & \text{se } \operatorname{sen}(x^2 + y^2) = 1 \\ \text{não existe} & \text{se } \operatorname{sen}(x^2 + y^2) = -1 \end{cases}$$

Daqui conlui-se que $f_n(x, y) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$, excepto nos pontos do conjunto $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = (k + \frac{1}{2})\pi$, para algum $k \in \mathbb{N}\}$. Note-se que S é uma união numerável de circunferências:

$$S = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} S_k,$$

onde $S_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = (k + \frac{1}{2})\pi\}$. Cada circunferência S_k é um conjunto com medida nula pois é a união do gráfico das funções contínuas $g_k(x) = \sqrt{(k + \frac{1}{2})\pi - x^2}$ e $h_k(x) = -\sqrt{(k + \frac{1}{2})\pi - x^2}$, no intervalo $[-\sqrt{(k + \frac{1}{2})}, \sqrt{(k + \frac{1}{2})}]$. Conlui-se que S tem medida nula pois é a união numerável de conjuntos com medida nula. Portanto $f_n(x, y) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ q.t.p em $\mathbb{R}^2$.