Análise Matemática III
2º semestre de 1999/2000

Exercício Resolvido 2

a) Mostre que a função $f : [0,3] \times [0,2] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} -2 & 1 < x < 2\ ,\ 1 < y < 2 \\ 1 & 2 < x < 3\ ,\ 0 < y < 1 \\ 2 & 0 < x < 1\ ,\ 0 < y < 1 \\ 3 & 1 < x < 2\ ,\ 0 < y < 1 \\ 0 & \text{nos restantes casos} \end{cases}$$

é uma função em escada e calcule o respectivo integral.

b) Mostre que a fronteira do seguinte conjunto

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2} < z < 1\}$$

tem medida nula em $\mathbb{R}^3$.

Resolução

a) Considere-se a partição do intervalo $[0,3] \times [0,2]$ dada por $\{I_{jk}\,;\, j = 1,2\,;\, k = 1,2,3\}$ em que

$$\begin{array}{rcl} I_{11} & = & [0,1[\times[0,1[\\ I_{12} & = & [1,2[\times[0,1[\\ I_{13} & = & [2,3] \times [0,1[\\ I_{21} & = & [0,1[\times[1,2] \\ I_{22} & = & [1,2[\times[1,2] \\ I_{23} & = & [2,3] \times [1,2] \end{array}$$

Considere-se também o conjunto de valores $\{s_{jk}\,;\, j = 1,2\,;\, k = 1,2,3\}$ dados por

$$\begin{array}{rcl} s_{11} & = & 2 \\ s_{12} & = & 3 \\ s_{13} & = & 1 \\ s_{21} & = & 0 \\ s_{22} & = & -2 \\ s_{23} & = & 0 \end{array}$$

Assim, temos $f(x,y) = s_{jk}$ para $(x,y) \in I_{jk}$, ou seja, f é uma função em escada e o seu integral é dado por

$$\int_I f = \sum_{j=1}^{2} \sum_{k=1}^{3} s_{jk} vol(I_{jk}) = 2 + 3 + 1 + 0 - 2 + 0 = 4$$

Note-se que $vol(I_{jk}) = 1\ ;\ \forall j,k$.

b) A fronteira do conjunto S é dada por $S_1 \cup S_2$ em que

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} = z \leq 1\}$$

e

$$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1 \,;\, x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Cada um destes dois conjuntos tem medida nula em $\mathbb{R}^3$. De facto, S_1 é um subconjunto do gráfico da função contínua $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f_1(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Do mesmo modo, S_2 é um subconjunto do gráfico da função $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f_2(x, y) = 1$.

Portanto, a fronteira de S tem medida nula em $\mathbb{R}^3$.