Análise Matemática III
2º semestre de 1999/2000

Exercício Resolvido 14

1) Considere a função $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y, z) = e^{-z}(x^2 + y^2)^{-5/4} \sin(x + y) \cos(x - y).$$

Decida se f é integrável em $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \geq 1, z \geq 0\}$. Justifique.

2) Encomendou-se a uma empresa técnica inglesa o estudo detalhado da trajectória da bola num certo remate de um conhecido futebolista português. Concluiu-se que a coordenada x da bola no instante t era dada pela fórmula

$$x(t) = \int_2^{t^2} e^{-(t-2)x^2} x^2 dx.$$

Calcule a componente em x da velocidade da bola no instante $t = 2$.

Solução: $f(x, y, z)$ é uma função contínua em V. Vamos primeiro examinar qualitativamente o comportamento de f no infinito. Os factores dados pelas funções trigonométricas são limitados em módulo por 1. Por outro lado, f descresce exponencialmente em z para x, y fixos. Além disso, para z fixo, e em coordenadas cilíndricas com $\rho^2 = x^2 + y^2$, temos que em V, ρ vai de 1 até ∞ e que f se comporta como $\sim \rho^{-5/2}$. Ora, o jacobiano das coordenadas cilíndricas é ρ. Tendo este facto em conta, o comportamento da integranda, do integral em ρ, será $\sim \rho^{-3/2}$. Tem-se $\rho^{-3/2} \in L([1, +\infty[)$. Logo, estamos à espera que f seja integrável em V. Vamos confirmar que é assim.

Como f tem o termo $\sin(x+y)\cos(x-y)$ cujo módulo é fácil de majorar e que toma valores ora positivos, ora negativos, torna-se mais conveniente utilizar o teorema da convergência dominada de Lebesgue.

Seja $S_k = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq (x^2 + y^2) \leq k^2, 0 \leq z \leq k\}$.

Vamos definir

$$f_k(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z) & \text{se } (x, y, z) \in S_k \\ 0 & \text{se } (x, y, z) \notin S_k. \end{cases}$$

Temos que $f_k \in L(V)$ para todo o k, já que para todo o k, S_k é compacto, f_k é contínua e limitada *no interior* de S_k e é zero fora de S_k.

Temos que $\lim_{k\to\infty} f_k(x, y, z) = f(x, y, z)$ para todo o $(x, y, z) \in V$.

Temos $|\sin(x + y)\cos(x - y)| \leq 1$, logo temos que $|f_k(x, y, z)| \leq h(x, y, z)$ onde $h(x, y, z) = e^{-z}(x^2 + y^2)^{-5/4}$. Se mostrarmos que $h \in L(V)$ então o TCDL implica que $f \in L(V)$.

Vamos então mostrar que $h \in L(V)$, usando o teorema da convergência monótona:

Seja

$$h_k(x, y, z) = \begin{cases} h(x, y, z) & \text{se } (x, y, z) \in S_k \\ 0 & \text{se } (x, y, z) \notin S_k. \end{cases}$$

Então para todo o k tem-se $h_k \in L(V)$, já que h_k é contínua e limitada no interior de S_k, é zero fora de S_k e S_k é compacto.

A sucessão $\{h_k\}$ é monótona crescente porque $h(x, y, z) \geq 0$ para todo $(x, y, z) \in V$.

Temos

$$\int_V h_k = \int_{S_k} h_k = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^k dz \int_1^k d\rho\rho(e^{-z}(\rho)^{-5/2}) =$$

$$= 2\pi(1 - e^{-k})2(1 - 1/\sqrt{k}) \leq 4\pi.$$

Logo a sucessão $\{\int_V h_k\}$ é limitada e o TCML implica que $h \in L(V)$.

Logo também temos que $f \in L(V)$ e que

$$\int_V f = \lim_{k\to\infty} \int_{S_k} f_k = \lim_{k\to\infty} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^k dz \int_1^k d\rho\rho^{-3/2} e^{-z} \sin(\rho\cos(\theta)+\rho\sin(\theta))\cos(\rho\cos(\theta)-\rho\sin(\theta)).$$

2) Como a velocidade é a derivada da posição em ordem ao tempo, temos de calcular $dx/dt(2)$. Como há dependência em t tanto da integranda como dos extremos de integração haverá duas contribuições para $dx/dt(2)$: uma que provém da regra de Leibniz, e que se obtem passando a derivada para dentro do integral; e outra, que provém de se diferenciar o extremo de integração.

Para determinar cada uma dessas contribuições cuidada e isoladamente é útil considerar a função

$$s(y,t) = \int_2^y e^{-(t-2)x^2} x^2 dx.$$

Temos que $x(t) = s(t^2, t)$. Logo, pela regra da derivada da função composta,

$$\frac{dx}{dt} = 2t\frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial s}{\partial t}.$$

Pelo teorema fundamental do cálculo, $\frac{\partial s}{\partial y} = e^{-(t-2)y^2} y^2$. Para calcularmos $\frac{\partial s}{\partial t}$ recorremos à regra de Leibniz.

A função $e^{-(t-2)x^2} x^2$ é contínua e tem derivadas contínuas em t para $x, t \in \mathbb{R}$, e o intervalo $[2, y]$ é compacto. Podemos portanto aplicar a regra de Leibniz,

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \int_2^y \frac{\partial(e^{-(t-2)x^2} x^2)}{\partial t} dx = \int_2^y (-x^2)x^2 e^{-(t-2)x^2} dx.$$

Logo,

$$\frac{dx}{dt}(2) = 2te^{-(t-2)y^2} y^2|_{y=4,t=2} + \int_2^4 (-x^2)x^2 dx = 64 - 4^5/5 + 32/5.$$