Análise Matemática III
1º semestre de 1999/2000

Exercício Resolvido 13

1) Considere a função $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}\sqrt{1-\sin(xyz)}\exp(-x^2-y^2-z^2).$$

Decida se f é integrável em $\mathbb{R}^3$. Justifique.

2) Considere uma distribuição de carga eléctrica no intervalo $[0,1] \subset \mathbb{R}$ dada pela densidade de carga por unidade de comprimento dependente do tempo $\rho(x,t) = (1-t)\exp(-tx^2)$, onde t é o tempo e $x \in [0,1]$. Calcule $Q'(0)$ onde $Q(t)$ é a carga eléctrica total no intervalo $[0,1]$ no instante t.

Solução: $f(x,y,z)$ é uma função contínua em $\mathbb{R}^3$. Além disso no infinito, como iremos verificar de seguida, $|f|$ decresce exponencialmente com $\exp(-r^2)$. Esperamos portanto que f seja integrável em $\mathbb{R}^3$. Como f tem o termo $\sqrt{1-\sin(xyz)}$ cujo módulo é fácil de majorar e que não tem um comportamento monótono, vamos utilizar o teorema da convergência dominada de Lebesgue. Seja $S_k = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x^2+y^2+z^2) \leq k^2\}$.

Vamos definir

$$f_k(x,y,z) = \begin{cases} f(x,y,z) & \text{se } (x,y,z) \in S_k \\ 0 & \text{se } (x,y,z) \notin S_k. \end{cases}$$

Temos que $f_k \in L(\mathbb{R}^3)$ para todo o k, já que para todo o k, S_k é compacto, f_k é contínua e limitada no interior de S_k e é zero fora de S_k.

Temos que $\lim_{k\to\infty} f_k(x,y,z) = f(x,y,z)$ para todo o $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

Temos $\sqrt{1-\sin(xyz)} \leq 2$, logo temos que $|f_k(x,y,z)| \leq h(x,y,z)$ onde $h(x,y,z) = 2\sqrt{x^2+y^2+z^2}\exp(-x^2-y^2-z^2)$. Se mostrarmos que $h \in L(\mathbb{R}^3)$ então o TCDL implica que $f \in L(\mathbb{R}^3)$.

Vamos então mostrar que $h \in L(\mathbb{R}^3)$, usando o teorema da convergência monótona:

Seja

$$h_k(x,y,z) = \begin{cases} h(x,y,z) & \text{se } (x,y,z) \in S_k \\ 0 & \text{se } (x,y,z) \notin S_k. \end{cases}$$

Então para todo o k tem-se $h_k \in L(\mathbb{R}^3)$, já que h_k é contínua e limitada no interior de S_k, é zero fora de S_k e S_k é compacto.

A sucessão $\{h_k\}$ é monótona crescente porque $h(x,y,z) \geq 0$ para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

Temos

$$\int_{\mathbb{R}^3} h_k = \int_{S_k} h_k = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\phi \int_0^k dr(r^2\sin(\phi))2r\exp(-r^2) =$$

$$= 4\pi\int_0^{k^2} du u\exp(-u) = -4\pi(u+1)\exp(-u)|_0^{k^2} = 4\pi(1-(1+k^2)\exp(-k^2)) \leq 4\pi.$$

Logo a sucessão $\{\int_{\mathbb{R}^3} h_k\}$ é limitada e o TCML implica que $h \in L(\mathbb{R}^3)$.

Logo também temos que $f \in L(\mathbb{R}^3)$ e que

$$\int_{\mathbb{R}^3} f = \lim_{k\to\infty}\int_{S_k} f_k = \lim_{k\to\infty}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\phi \int_0^k dr(r^2\sin(\phi))r\sqrt{1-\sin(r^3\cos^2(\phi)\sin(\phi)\cos(\theta)\sin(\theta))}\exp(-r^2).$$

2) A carga eléctrica total é dada pelo integral da densidade de carga:

$$Q(t) = \int_0^1 (1-t)\exp(-tx^2)dx.$$

A função $\rho(x,t)$ é contínua e tem derivadas contínuas em t para $x, t \in \mathbb{R}$, e o intervalo $[0,1]$ é compacto. Podemos portanto aplicar a regra de Leibniz para calcular $Q'(0)$:

$$Q'(t) = \int_0^1 (-1 + x^2(1-t)) \exp(-tx^2) dx.$$

Logo,

$$Q'(0) = \int_0^1 (x^2 - 1) dx = \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3}.$$