Análise Matemática III
2º semestre de 1999/2000

Exercício resolvido 13

Um vaso de manjerico limita um volume da forma

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < z,\ 1 < z < 4\}.$$

a) Considere o campo vectorial $f(x, y, z) = (xz^2, yz^2, z^3)$. Calcule o fluxo de f através da parede lateral do vaso, constituída pela superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z,\ 1 < x^2 + y^2 z4\},$$

que faz parte da fronteira de V, no sentido da normal unitária com componente segundo z negativa, usando o teorema da divergência.

b) Calcule o fluxo de $\mathrm{r}otf$ através de S, no sentido da normal da alínea anterior, usando o teorema de Stokes.

Solução:

a) Para aplicarmos o teorema da divergência temos de considerar a superfície *fechada* que constituía fronteira de V. Essa superfície é formada pela parede lateral do vaso, que é o pedaço de parabolóide S, pela "tampa" superior $D_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 4,\ x^2 + y^2 < 4\}$, e pela "tampa" inferior, $D_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1,\ x^2 + y^2 < 1\}$.

Seja ν o campo vectorial normal exterior unitário à fronteira de V.

Então pelo teorema da divergência,

$$\int_V \mathrm{div} f = \int_S f \cdot \nu_S + \int_{D_1} f \cdot \nu_1 + \int_{D_2} f \cdot \nu_2.$$

Temos $\mathrm{div} f = z^2 + z^2 + 3z^2 = 5z^2$. Logo, utilizando coordenadas cilíndricas,

$$\int_V \mathrm{div} f = \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^4 dz \int_0^{\sqrt{z}} 5z^2 \,\rho\, d\rho = (5/4)(4^4 - 1)\pi.$$

A normal exterior unitária em D_1 é $\nu_1 = (0, 0, 1)$, logo $f(x, y, z) \cdot \nu_1 = z^3 = 4^3$ em D_1. Assim, temos $\int_{D_1} f \cdot \nu_1 = 4^3 \int_{D_1} 1 = 4^3 \cdot Area(D_1) = 4^4\pi$, já que D_1 é um disco de raio 2.

Do mesmo modo, a normal exterior unitária em D_2 é $\nu_2 = (0, 0, -1)$, e $f(x, y, z) \cdot \nu_2 = -z^3 = -1$ em D_2, logo $\int_{D_2} f \cdot \nu_2 = -\int_{D_2} 1 = -\pi$.

Logo obtemos o resultado final,

$$\int_S f \cdot \nu_S = \int_V \mathrm{div} f - \int_{D_1} f \cdot \nu_1 - \int_{D_2} f \cdot \nu_2 = ((5/4)(4^4 - 1) - 4^4 + 1)\pi.$$

b) Pelo teorema de Stokes, vamos ter

$$\int_S \mathrm{r}otf \cdot \nu_S = \int_{\partial D_1} f + \int_{\partial D_2} f,$$

onde ∂D_1 está orientada no sentido anti-horário e ∂D_2 está orientada no sentido horário de um observador que olha no sentido do semi-eixo positivo dos z.

Temos então as parametrizações de ∂D_1 e ∂D_2, com $\theta \in]0, 2\pi[$, $g_1(\theta) = (2\cos(\theta), -2\sin(\theta), 4)$ e $g_2(\theta) = (\cos(\theta), \sin(\theta), 1)$. Logo obtemos, $g_1^{'}(\theta) = (-2\sin(\theta), -2\cos(\theta), 0)$ e $g_2^{'}(\theta) = (-\sin(\theta), \cos(\theta), 0)$.

Então obtem-se,

$$\int_S \mathrm{rot} f \cdot \nu_S = \int_{\partial D_1} f + \int_{\partial D_2} f = \int_0^{2\pi} (16\cos(\theta), -16\sin(\theta), 4^3) \cdot (-2\sin(\theta), -2\cos(\theta), 0) d\theta +$$

$$+ \int_0^{2\pi} (\cos(\theta), \sin(\theta), 1) \cdot (-\sin(\theta), \cos(\theta), 0) d\theta = 0.$$