

Análise Matemática III
1º semestre de 2000/2001

Exercício resolvido 13

O filtro de uma máquina de lavar a loiça cuja forma é aproximadamente a do conjunto

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 3\},$$

está imerso numa corrente de água cujo campo de velocidades é dado pela fórmula

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (2yz \cos(y^2), 2xz \cos(x^2), 1).$$

- a) Mostre que a quantidade de água no interior do filtro se mantém constante, supondo que a densidade da água é constante igual a 1.
- b) Usando o teorema de Stokes, calcule o fluxo de água que entra através da parede curva do filtro.

Solução:

- a) Pelo teorema da divergência, o fluxo total de água através das paredes do filtro é

$$\int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = \int_D \nabla \cdot \mathbf{F}.$$

Como $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$, o fluxo é zero. Portanto a quantidade de água que **entra** no filtro é igual à que sai.

- b) Seja C a parede curva de D . Note-se que \mathbf{F} é um campo de divergência nula em \mathbb{R}^3 . Como \mathbb{R}^3 é um conjunto em estrela, podemos concluir que \mathbf{F} é um rotacional, ou seja, existe um campo \mathbf{L} tal que $\nabla \times \mathbf{L} = \mathbf{F}$. Um campo \mathbf{L} que satisfaça esta equação é um potencial vector para \mathbf{F} .

Para calcular o fluxo de \mathbf{F} através de C , podemos começar por calcular um potencial vector \mathbf{L} para \mathbf{F} e depois aplicar o teorema de Stokes a \mathbf{L} . Calcular $\mathbf{L} = (L_1, L_2, L_3)$ consiste em resolver o seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} \frac{\partial L_3}{\partial y} - \frac{\partial L_2}{\partial z} = 2yz \cos(y^2) \\ \frac{\partial L_1}{\partial z} - \frac{\partial L_3}{\partial x} = 2xz \cos(x^2) \\ \frac{\partial L_2}{\partial x} - \frac{\partial L_1}{\partial y} = 1 \end{cases}$$

A solução para este sistema não é única. Para encontrar uma solução particular, podemos procurar uma solução que satisfaça, por exemplo, $L_1 = 0$. Obtemos,

$$\begin{cases} \frac{\partial L_3}{\partial y} - \frac{\partial L_2}{\partial z} = 2yz \cos(y^2) \\ -\frac{\partial L_3}{\partial x} = 2xz \cos(x^2) \\ \frac{\partial L_2}{\partial x} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial L_3}{\partial y} - \frac{\partial L_2}{\partial z} = 2yz \cos(y^2) \\ L_3 = -z \sin(x^2) + f(y, z) \\ L_2 = x + g(y, z) \end{cases}$$

Mais uma vez, a solução não é única. Impondo $g = 0$ e substituindo na primeira equação, vem $f(y, z) = z \sin(y^2)$, logo

$$\mathbf{L} = (0, x, z \sin(y^2) - z \sin(x^2)).$$

Pelo teorema de Stokes,

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = \int_{\partial C} \mathbf{L} \cdot d\alpha,$$

onde \mathbf{n} é a normal unitária que aponta para **dentro** do filtro e consequentemente α percorre ∂C no sentido **positivo** quando visto do ponto $(0, 0, 10000)^*$. Temos

$$\partial C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 9, z = 3\},$$

pelo que $\alpha(t) = (3 \cos(t), 3 \sin(t), 3), t \in [0, 2\pi]$, percorre ∂C na direcção indicada. Assim,

$$\begin{aligned} \int_{\partial C} \mathbf{L} \cdot d\alpha &= \int_0^{2\pi} (0, 3 \cos(t), 3 \sin(9 \sin^2(t)) - 3 \sin(9 \cos^2(t))) \cdot (-3 \sin(t), 3 \cos(t), 0) dt \\ &= \int_0^{2\pi} 9 \cos^2(t) dt = 9\pi, \end{aligned}$$

portanto a quantidade de água que entra através da parede curva do filtro é 9π .

*Apesar de ∂C não se ver bem deste ponto