Análise Matemática III
2º semestre de 1999/2000

Exercício resolvido 12 Consideremos uma montanha imaginária M descrita pelo seguinte modelo

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < z < 1 - \sqrt{x^2 + y^2}\}$$

Suponhamos que no ponto do sopé da montanha dado pelas coordenadas $(0, 1, 0)$ se encontra uma co-incineradora imaginária que expele gases tóxicos que se difundem pela atmosfera, eliminando, no primeiro ano de funcionamento, qualquer tipo de vida que se encontre na região descrita por $|y - 1| < 1$.

Determine a área da parte da montanha afectada pela co-incineradora durante o primeiro ano de funcionamento.

Solução: A superfície da montanha descrita pela equação $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ é um cone com vértice no ponto $(0, 0, 1)$ e base circular no plano $z = 0$, com centro na origem e raio igual a um.

Da inequação $|y - 1| < 1$, obtemos $0 < y < 2$ e, portanto, devemos considerar a superfície do cone correspondente a $y > 0$ apenas.

Em coordenadas cilíndricas (ρ, θ, z), temos então

$$z = 1 - \rho \;\; ; \;\; 0 < \theta < \pi \;\; ; \;\; 0 < z < 1$$

e, portanto a parte da montanha afectada pode ser descrita pela parametrização $g : T \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$g(\theta, z) = ((1 - z) \cos \theta, (1 - z) \operatorname{sen} \theta, z)$$

em que

$$T =]0\,,\,\pi[\times]0, 1[$$

A área afectada pode ser calculada de duas formas:

a)
$$\int\int_T \sqrt{\det Dg(\theta, z)^t Dg(\theta, z)}\, d\theta dz$$

em que $Dg(\theta, z)^t$ designa a transposta da derivada $Dg(\theta, z)$.

b)
$$\int\int_T ||D_1 g(\theta, z) \times D_2 g(\theta, z)||\, d\theta dz$$

em que $D_1 g(\theta, z)$ e $D_1 g(\theta, z)$ designam, respectivamente, a primeira e a segunda colunas da derivada $Dg(\theta, z)$.

A derivada da parametrização g é dada pela matriz

$$Dg(\theta, z) = \begin{bmatrix} -(1 - z) \operatorname{sen} \theta & -\cos \theta \\ (1 - z) \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Portanto, por um lado temos,

$$Dg(\theta, z)^t Dg(\theta, z) = \begin{bmatrix} (1 - z)^2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

e, por outro,

$$D_1 g(\theta, z) \times D_2 g(\theta, z) = (-(1 - z) \cos \theta, (1 - z) \operatorname{sen} \theta, 1 - z)$$

Assim,

a) A área afectada é dada por

$$\int\int_T \sqrt{\det Dg(\theta,z)^t Dg(\theta,z)}\, d\theta dz = \int_0^1 \left(\int_0^\pi \sqrt{2}\,(1-z)\, d\theta \right) dz = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$$

b) A área afectada é dada por

$$\int\int_T ||D_1 g(\theta,z) \times D_2 g(\theta,z)||\, d\theta dz = \int_0^1 \left(\int_0^\pi \sqrt{2}\,(1-z)\, d\theta \right) dz = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$$