Análise Matemática III
1º semestre de 2000/2001

Exercício resolvido 12 Considere a superfície $S \subset \mathbb{R}^3$ definida por $z = (x^2 + y^2)^2$, com $x^2 + y^2 < 1$ e com densidade de massa dada por $\alpha(x, y, z) = \sqrt{1 + 16(x^2 + y^2)^3}$.

Calcule a massa total de S.

Solução:

Em coordenadas cilíndricas (ρ, θ, z), temos que S é descrita pela parametrização

$$g(\rho, \theta) = (\rho \cos(\theta), \rho \operatorname{sen}(\theta), \rho^4),$$

com $0 < \rho < 1$ e $0 < \theta < 2\pi$.

A derivada da parametrização g é dada pela matriz

$$Dg(\rho, \theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\rho \operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) & \rho \cos(\theta) \\ 4\rho^3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Temos então que, sendo $D_\rho g$ e $D_\theta g$ respectivamente a primeira e segunda colunas de Dg,

$$V(D_\rho g, D_\theta g) = \sqrt{\det Dg^t Dg} = ||D_\rho g \times D_\theta g|| = \left(\det \begin{bmatrix} 1 + 16\rho^6 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{bmatrix} \right)^{1/2} = \rho\sqrt{1 + 16\rho^6}.$$

A massa total de S é então dada por

$$M = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \alpha(g(\rho, \theta)) V(D_\rho g, D_\theta g) d\theta \right) d\rho = 2\pi \int_0^1 \rho(1 + 16\rho^6) = 2\pi(1/2 + 16/8) = 5\pi.$$