# Análise Matemática III
# 1º semestre de 1999/2000

## Exercício resolvido 12

Considere as superfícies definidas por

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 4, \ -2 < z < 2\}$$

$$D_- = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = -2, \ x^2 + y^2 < 4\}$$

$$D_+ = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2, \ x^2 + y^2 < 4\}$$

a) Calcule o fluxo do campo vectorial $f(x,y,z) = (x\cosh^2(z), y\cosh^2(z), z - \frac{1}{2}\sinh(2z))$ através de $S$, segundo a normal exterior unitária ao cilindro $x^2 + y^2 = 4$, usando o teorema da divergência.

b) Calcule o fluxo do campo $h(x,y,z) = (xe^z, ye^z, -2e^z)$ através de $S$, segundo a normal da alínea anterior, usando o teorema de Stokes.

**Solução:** S é constituída por uma pedaço do cilindro vertical centrado no eixo dos $z$ e com raio 2, com $-2 < z < 2$. $D_-$ e $D_+$ são as "tampas" inferior e superior contidas nos planos $z = -2$ e $z = 2$ respectivamente.

a) Seja $V$ o volume limitado por $S$, $D_-$ e $D_+$, e seja $\nu$ o campo vectorial normal exterior unitário à fronteira de $V$. Então pelo teorema da divergência,

$$\int_V \mathrm{div} f = \int_S f \cdot \nu + \int_{D_-} f \cdot \nu + \int_{D_+} f \cdot \nu.$$

Temos $\mathrm{div} f = 2\cosh^2(z) + 1 - \cosh(2z) = 2$. Logo

$$\int_V \mathrm{div} f = 2\,Vol(V) = 2 \cdot 4 \cdot 4\pi = 32\pi.$$

A normal exterior unitária em $D_-$ é $\nu = (0,0,-1)$, logo $\int_{D_-} f \cdot \nu = \int_{D_-}(-z + \frac{1}{2}\sinh(2z)) = (2 + \frac{1}{2}\sinh(-4)) \cdot Area(D_-) = 4\pi(2 - \frac{1}{2}\sinh(4))$.

Do mesmo modo, a normal exterior unitária em $D_+$ é $\nu = (0,0,1)$, logo $\int_{D_+} f \cdot \nu = \int_{D_+}(z - \frac{1}{2}\sinh(2z)) = (2 - \frac{1}{2}\sinh(4)) \cdot Area(D_+) = 4\pi(2 - \frac{1}{2}\sinh(4))$.

Logo obtemos o resultado final,

$$\int_S f \cdot \nu = \int_V \mathrm{div} f - \int_{D_-} f \cdot \nu - \int_{D_+} f \cdot \nu = 32\pi - 8\pi(2 - \frac{1}{2}\sinh(4)).$$

Note-se que teria sido um pouco mais complicado calcular o fluxo de $f$ através de $S$ directamente por causa do integral em $z$.

b) Usando a definição de rotacional podemos verificar que se tem $h(x,y,z) = \mathrm{rot}\, l(x,y,z)$ com $l(x,y,z) = (ye^z, -xe^z, 0)$. (Para obter $l$, que é designado por potencial vector de $h$, tem de se resolver as equações dadas pelas três componentes de $h(x,y,z) = \mathrm{rot}\, l(x,y,z)$. A solução não é única, *i.e.* o potencial vector não é único. Para encontrar uma solução particular devemos impôr condições, como por exemplo $l_3 = 0$, consistentes com as equações mas que as simplifiquem de modo a podermos resolvê-las. O problema de encontrar $l$ a partir de $h$ é exactamente análogo ao de encontrar a função potencial de um campo gradiante.)

Logo, pelo teorema de Stokes, vamos ter

$$\int_S h \cdot \nu = \int_{\partial D_-} l + \int_{\partial D_+} l,$$

onde $\partial D_-$ está orientada no sentido horário e $\partial D_+$ está orientada no sentido anti-horário de um observador que olha no sentido do semi-eixo positivo dos $z$.

Temos então as parametrizações de $\partial D_-$ e $\partial D_+$, com $\theta \in ]0, 2\pi[$, $g_-(\theta) = (2\cos(\theta), 2\sin(\theta), -2)$ e $g_+(\theta) = (2\cos(\theta), -2\sin(\theta), 2)$. Logo obtemos, $g'_-(\theta) = (-2\sin(\theta), 2\cos(\theta), 0)$ e $g'_+(\theta) = (-2\sin(\theta), -2\cos(\theta), 0)$.

Então obtem-se,

$$\int_S h \cdot \nu = \int_{\partial D_-} l + \int_{\partial D_+} l = \int_0^{2\pi} (2\sin(\theta)e^{-2}, -2\cos(\theta)e^{-2}, 0) \cdot (-2\sin(\theta), 2\cos(\theta), 0) d\theta +$$

$$+ \int_0^{2\pi} (-2\sin(\theta)e^{2}, -2\cos(\theta)e^{2}, 0) \cdot (-2\sin(\theta), -2\cos(\theta), 0) d\theta = 8\pi(e^2 - e^{-2}).$$