Análise Matemática III
1º semestre de 1999/2000

Exercício resolvido 11

Considere a superfície definida por

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = -9 + 3(y^2 + z^2), -9 \leq x < 0\}.$$

Escreva uma expressão para a coordenada x do centróide de S.

Solução: S é constituída por uma pedaço de parabolóide com eixo de revolução ao longo do eixo dos x. Podemos usar coordenadas polares r e θ no plano y, z, tal que $r \in]0, \sqrt{3}[$ e $\theta \in]0, 2\pi[$ e a parametrização será $g(r, \theta) = (-9 + 3r^2, r\cos\theta, r\sin\theta)$.

Temos

$$Dg(r, \theta) = \begin{bmatrix} 6r & 0 \\ \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{bmatrix}$$

e portanto

$$V(D_r g, D_\theta g) = ||D_r g \times D_\theta g|| = (\det(Dg^t Dg))^{1/2} = r\sqrt{1 + 36r^2}.$$

Temos então a área de S dada por

$$Vol(S) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}} r\sqrt{1 + 36r^2} dr d\theta = \frac{\pi}{9}(109^{3/2} - 1).$$

A coordenada x do centróide é então obtida atavés de

$$\bar{x} = \frac{1}{Vol(S)} \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}} x(r, \theta) r\sqrt{1 + 36r^2} dr d\theta =$$

$$= \frac{1}{Vol(S)} \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}} (-9 + 3r^2) r\sqrt{1 + 36r^2} dr d\theta = -9 + \frac{2\pi}{Vol(S)} \int_0^{\sqrt{3}} 3r^3\sqrt{1 + 36r^2} dr.$$